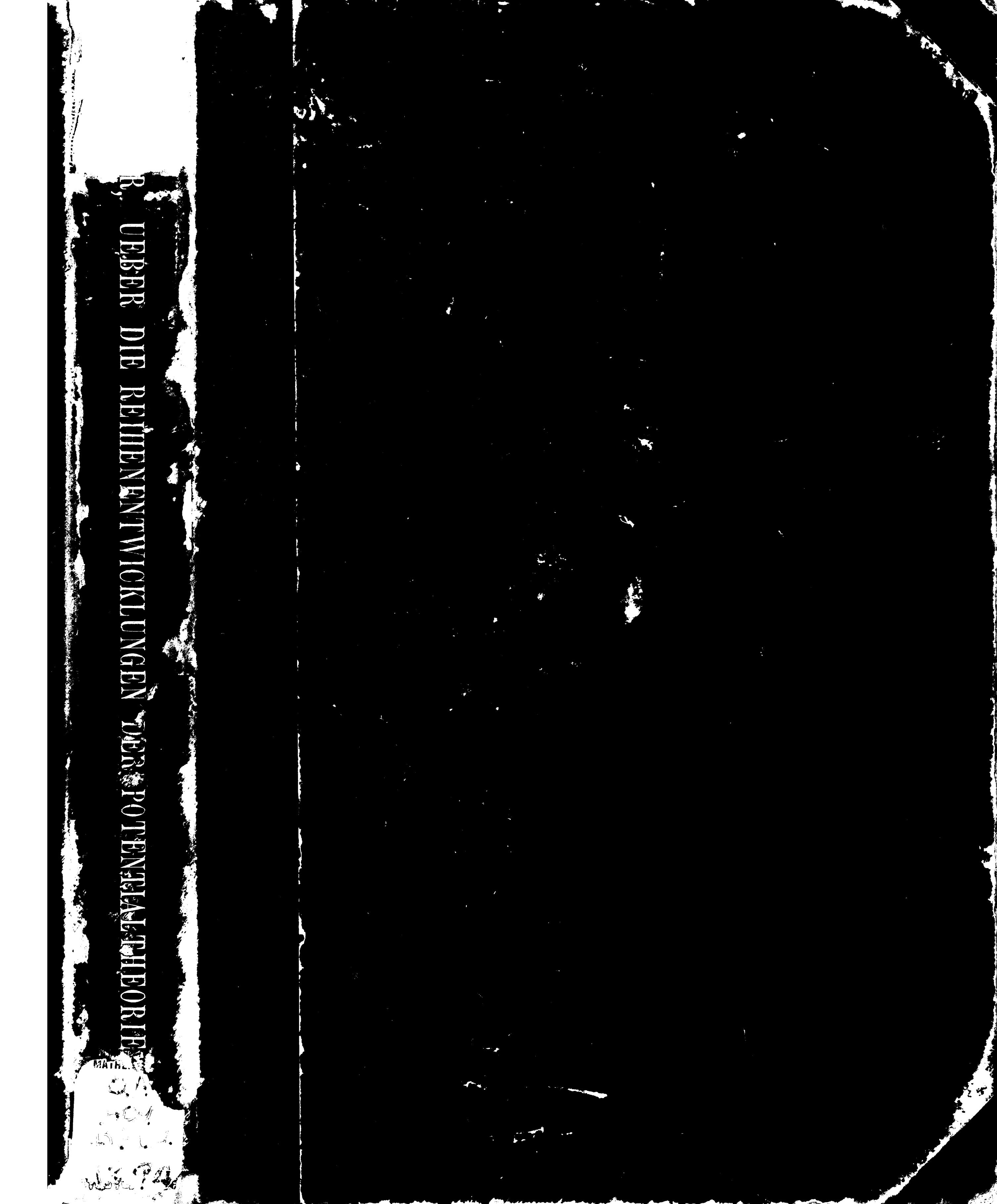
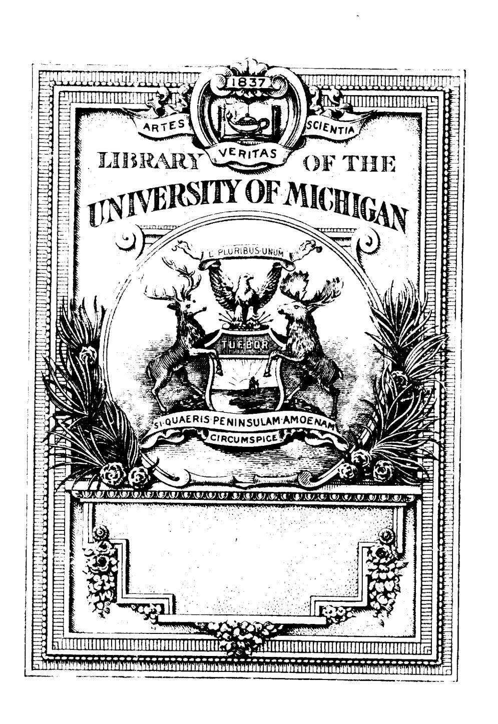

UEBER DIE REIHENENTWICKLUNGEN DER POTENTIALTHEORIE


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

UEBER DIE

REIHENENTWICKELUNGEN

DER

POTENTIALTHEORIE

VON

MAXIME BÔCHER.

MIT EINEM VORWORT

VON

FELIX KLEIN.

MIT 113 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

Vorwort.

Die Entwickelungen, welche Herr Bôcher in seiner Schrift gibt, scheinen geeignet, das Interesse des mathematischen Publikums nach verschiedenen Richtungen auf sich zu ziehen. Ich betone zunächst, dass die in Betracht kommenden Reihenentwickelungen in dem Buche von Heine und anderwärts nur so zur Darstellung gelangen, dass zahllose Fallunterscheidungen voranstehen, während hier ein gleichförmiger allgemeiner Gesichtspunkt gewonnen wird, aus dem alle Einzelheiten deriviren. Im Zusammenhange damit wird auf die anschauungsmässige Erfassung der verschiedenen Functionen und Flächen das grösste Gewicht gelegt, nicht, wie sonst, auf deren Definition durch complicirte Formeln. Drittens sei hervorgehoben, dass dabei doch gewisse formale Hülfsmittel der modernen Analysis herangezogen werden, welche in zusammenhängenden Darstellungen dieser Art bis jetzt noch nicht zur Geltung gelangten, ich meine die pentasphärischen Coordinaten und überhaupt die homogenen Variabeln. Dafür wird man ja andere Entwickelungen vermissen, die für die Zwecke einer allseitigen Darstellung des Gegenstandes unerlässlich sind, insbesondere die Durchführung der Convergenzbetrachtungen und die Zurechtmachung des rechnerischen Details. Vielleicht wird die in dieser Richtung nothwendige Ergänzung bald von anderer Seite gegeben werden.

Wird die vorliegende Schrift für diejenige Disciplin, welche zunächst in Betracht kommt, ich meine die mathematische Physik, von Nutzen sein? Man muss es hoffen. Denn es kann in der mathematischen Physik doch nicht blos darauf ankommen, Einzelprobleme, unter Einführung geeigneter Vernachlässigungen, bis zum Vergleich mit dem Experimente rechnerisch durchzuarbeiten, sondern es muss

immer einen gewissen Werth behalten, den gedanklichen Inhalt der allgemeinen Methoden, vollständiger als es bis dahin geschehen war, zu exponiren. Und sollte Jemand vom physikalischen Standpunkte aus den mathematischen Apparat, der für diesen Zweck in Bewegung gesetzt wird, für zu ausgedehnt oder schwerfällig halten, so wird er doch die Tendenz billigen, die allgemeinen Ideenbildungen der neueren mathematischen Forschung auf ihre physikalische Brauchbarkeit zu prüfen.

Göttingen, im Mai 1894.

F. Klein.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Erster Abschnitt.

Geometrisches über confocale Cyclidenschaaren.

Kapitel I.

Ueber einige Methoden und Grundsätze der projectiven Geometrie.

Kapitel II.

Ueber die Geometrie der reciproken Radien.

Kapitel III.

Ueber die Anwendung der Weierstrassischen Theorie der Elementartheiler auf confocale Cyclidenschaaren.

Kapitel IV.

Beschreibung der Gestalt der verschiedenen confocalen Cyclidenschaaren.

Kapitel V.

Einführung krummliniger Coordinaten.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für allgemeine Cyclidensechsflache.

Kapitel I.

Ueber die Lamé'sche Gleichung.

Kapitel II.

Ueber das Oscillationstheorem der Lamé'schen Gleichung.

Kapitel III.

Ueber die Behandlung des Potentials durch pentasphärische und cyclidische Coordinaten.

Kapitel IV.

Ueber die Benutzung der Lamé'schen Producte in den Reihenentwickelungen der Potentialtheorie.

Dritter Abschnitt.

Ueber die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für ausgeartete Cyclidensechsflache.

Kapitel I.

Ueber die Specialfälle der Lamé'schen Gleichung und des zugehörigen Oscillationstheorems.

Kapitel II.

Ueber die Lamé'schen Producte, welche zu ausgearteten Systemen cyclidischer Coordinaten gehören.

Kapitel III.

Ueber ausgeartete Cyclidensechsflache und die zugehörigen Randwerthaufgaben.

Anhang.

Uebertragung der bisherigen Resultate auf den Raum von n Dimensionen.

Einleitung.

Bekanntlich hat man es bei vielen Untersuchungen der mathematischen Physik mit gewissen verhältnismässig einfachen linearen partiellen Differentialgleichungen zu thun. Eine der allgemeinsten und brauchbarsten Methoden solche Lösungen dieser Gleichungen zu finden, wie man sie für physikalische Probleme nöthig hat, besteht darin, dass man aus bestimmten leicht aufzufindenden particulären Lösungen allgemeinere Lösungen in der Form unendlicher Reihen aufbaut. Schon während der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts wurde diese Methode verschiedentlich, aber namentlich von Euler, auf akustische Probleme angewandt; und dies hatte auch seinen guten Grund. In der That hat diese Lösungsmethode für akustische Probleme eine unmittelbare physikalische Bedeutung, indem sie geradezu als analytischer Ausdruck des von Daniel Bernoulli aufgestellten Princips der Coexistenz kleiner Schwingungen angesehen werden kann.

Aber sogar in den einfachsten der hier vorkommenden Fälle, in welchen man es mit gewöhnlichen trigonometrischen Reihen zu thun hat, konnte die Lösung damals nicht vollständig durchgeführt werden. In der That waren nicht nur die Formeln zur Bestimmung der Coefficienten solcher Reihen unbekannt, sondern man glaubte überhaupt nicht, dass eine Bestimmung im allgemeinen möglich wäre, indem man es als undenkbar ansah, dass eine trigonometrische Reihe in verschiedenen Intervallen verschiedene Functionen darstellen könnte.

Fourier (1812) haben wir es zu verdanken den allgemeinen Ansatz gemacht zu haben, durch welchen alle diese Probleme zu Ende geführt werden können. Seine eigentliche Leistung besteht nicht in der Coefficientenbestimmung selber, denn die wesentlichen Schwierigkeiten derselben waren schon von Lagrange erledigt*), und sogar die endgültigen Formeln für die Coefficienten in einer posthumen Ab-

*) Hierüber, sowie über die Geschichte der trigonometrischen Reihen überhaupt vergl. Riemann's Habilitationsschrift, Ges. Werke, S. 213 (erste Aufl.).

handlung von Euler aufgestellt, sondern in der klaren Behauptung, es könne jede Function vermittelst dieser Formeln in trigonometrische Reihen (sog. Fourier'sche Reihen), bezw. in andere ähnlich gebildete Reihen, entwickelt werden *). Wir müssen hinzufügen, dass Fourier sich mit einer ganz anderen Art physikalischer Probleme beschäftigte wie seine Vorgänger, nämlich mit der Theorie der Wärmeleitung. Durch eine sehr kleine Modification des Euler'schen Ansatzes wurde es ihm aber möglich das Wärmeleitungsproblem für das rechtwinklige Parallelepipedon, sowie für den Rotationscylinder zu lösen. Bei gewissen Grenzfällen des erstgenannten Körpers treten bei Fourier an Stelle der unendlichen Reihen Integraldarstellungen (sog. Fourier'sche Integrale) auf.

Schon von Laplace (1782) war die uns interessirende Methode in noch einem anderen physikalischen Gebiet angewandt worden, nämlich in der Attractionstheorie. Indem dieser Mathematiker den von Lagrange herrührenden Begriff des Potentials weiter entwickelte, fand er, dass auch diese Function einer partiellen Differentialgleichung genügt. Hierauf konnte unsere Methode angewandt werden, um das Potential eines homogenen Körpers zu bestimmen, welcher sehr wenig von einer Kugel abweicht. Die Lösung dieser Aufgabe wird durch sog. *Kugelfunctionen* geleistet, welche in noch speciellerer Gestalt schon von Legendre bei dem Problem der Anziehung von Rotationskörpern eingeführt waren.

Auch andere Mathematiker, unter denen in erster Linie Poisson zu nennen ist, beschäftigten sich mit dieser Integrationsmethode bei verschiedenen physikalischen Problemen, aber der nächste grosse Fortschritt wurde erst in den dreissiger Jahren von Lamé gemacht, indem er nach Einführung des Systems der sog. elliptischen Coordinaten das Problem des Wärmegleichgewichts im dreiaxigen Ellipsoid behandelte. Hierdurch wurde ein neuer fundamentaler Gedanke in die Theorie eingeführt, dass es nämlich in erster Linie jedesmal auf die Aufstellung eines dem vorliegenden Problem angemessenen Systems krummliniger Coordinaten ankommt.

Nach Lamé sind dann noch zahlreiche besondere Probleme nach der Methode der Reihenentwickelung von verschiedenen Mathematikern behandelt worden, so von Heine, Liouville, C. Neumann und Mehler,

*) Diese Behauptung bleibt bei Fourier unbegründet. Eine Begründung derselben bezw. eine Umgrenzung der Fälle, in welchen sie richtig ist, findet man in Dirichlet's berühmter Abhandlung in Crelle Bd. 4, 1829. Wir gehen im Folgenden auf die Frage der Convergenz unserer Reihen nicht ein, vergl. jedoch Abschnitt II, Kapitel 4, § 3.

wobei sich die Einführung verschiedener neuer Functionsgattungen nöthig erwies (vergl. III, 2, § 3; III, 3, § 7)*). An dieser Stelle mag der Name von Heine besonders hervorgehoben werden, nicht nur wegen der grossen Ausdehnung seiner sonstigen hierhergehörigen Untersuchungen, wie sie in dem *Handbuch der Kugelfunctionen* zusammengestellt sind, sondern auch, weil die früheren Untersuchungen Lamé's von ihm auf Räume von mehr als drei Dimensionen übertragen wurden.

Die sämmtlichen bis jetzt erwähnten Mathematiker sind vorzugsweise *Analytiker*. Dagegen nehmen die zwei Forscher Sturm und W. Thomson unserer Theorie gegenüber eine ganz andere Stellung ein, indem sie das Problem mehr *anschauungsmässig* auffassen.

Als erste Hauptleistung von Thomson auf diesem Gebiet nennen wir die Einführung der Transformation durch reciproke Radien in die Potentialtheorie (1845). Hiernach lassen sich gewisse Potentialaufgaben für einen beliebigen Körper lösen, wenn letzterer aus einem schon behandelten Körper durch Inversion hervorgeht. Dieser Gedanke wird, wie wir im ersten Abschnitt sehen werden, in unserer Darstellung von Beginn an eine fundamentale Rolle spielen.

Einige Jahre früher (1836) hatte Sturm den Ansatz zur Entwickelung einer anderen Methode gegeben, welche in unserer Darstellung von nicht weniger Bedeutung sein wird. Derselbe beschäftigte sich mit der eindimensionalen Wärmebewegung in einem nicht homogenen Stabe und fand, dass die hier auftretenden durch gewisse gewöhnliche Differentialgleichungen definirten Functionen durch die Anzahl ihrer Nullstellen in einem gewissen Intervalle geradezu *charakterisirt* sind. Dieses Oscillationsprincip, wie wir es nennen wollen, wurde dann von Thomson in dem Appendix B von Thomson und Tait's Natural Philosophy in die räumliche Potentialtheorie übertragen. Dort handelt es sich in sehr knapper und schwer verständlicher Weise um Körper, welche von Flächen begrenzt sind, die dem Orthogonalsysteme der gewöhnlichen Polarcoordinaten angehören, d. h. von concentrischen Kugeln, Meridianebenen und Rotationskegeln. Hier anschliessend wurde endlich von Klein (1881) dieses Oscillationsprincip für die Potentialtheorie klar formulirt und gleich auf allgemeinere Fälle angewandt, nämlich auf das nicht zerfallende Orthogonalsystem der elliptischen Coordinaten.

*) Diese Citate sowie die später vorkommenden sind so zu verstehen, dass die erste (römische) Zahl sich auf den Abschnitt bezieht, die zweite (arabische) auf das Kapitel, während die dritte mit dem Zeichen § versehene Zahl den Paragraphen angiebt.

Wenn wir uns nun im Folgenden trotz der grossen Anzahl von physikalischen Fragen, auf welche unsere Methode anwendbar ist, fast ausschliesslich auf eine einzige Disciplin, die Potentialtheorie, beschränken, so geschieht dies einerseits um eine zu grosse Ausdehnung des Stoffes zu vermeiden, andererseits weil gerade durch diese Einschränkung die Behandlung viel einheitlicher und übersichtlicher gemacht werden kann. Aus denselben Gründen werden wir auch in dieser Theorie ein einziges Problem (die sofort zu nennende *Randwerthaufgabe*) herausgreifen und erst hinterher (III, 3, § 6) die anderen Potentialprobleme, welche sich durch unsere Methode behandeln lassen, kurz besprechen. Diese Randwerthaufgabe lautet:

Es wird verlangt innerhalb eines vorgelegten Körpers ein Potential, d. h. eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$, zu bestimmen, welche dort eindeutig und nebst ihren ersten Ableitungen stetig verläuft und auf der Begrenzung des Körpers beliebig vorgeschriebene Werthe annimmt.

Wir stellen uns die Frage: können wir nicht diese Randwerthaufgabe für einen Körper so allgemeiner Art lösen, dass sämmtliche bis jetzt behandelten Körper als Ausartungen desselben angesehen werden können? Einen solchen Körper hat man in der That in dem *Cyclidensechsflach* vor sich, d. h. in einem von sechs confocalen Cycliden begrenzten Körper.

Die hier als Cycliden bezeichneten Flächen kommen in der Potentialtheorie zum ersten Male in zwei Aufsätzen von Wangerin vor. Durch eine von C. Neumann gestellte Preisaufgabe auf die Randwerthaufgabe für eine Rotationscyclide geführt, hat er ein Jahr später (1876) den ersten Ansatz zur Behandlung der Randwerthaufgabe für solche Körper gegeben, welche von confocalen Cycliden der allgemeinsten Art begrenzt sind*). Andererseits war die geometrische Theorie dieser Flächen viel früher entwickelt worden, und wir wollen noch einen kurzen Ueberblick über die Entstehung dieser Theorie geben.

Der Name Cyclide wurde ursprünglich von Dupin (1822) für diejenige Fläche gebraucht, deren sämmtliche Krümmungslinien Kreise (bezw. Geraden) sind. Inzwischen werden wir, dem Vorgange von Darboux folgend, mit dem Namen Cyclide eine viel allgemeinere Fläche

*) Eine dritte Abhandlung von Wangerin (Berliner Monatsberichte 1878), sowie ein in jüngster Zeit erschienenes Buch von Häntzschel „Ueber die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen“, welches sich an diese Abhandlung anschliesst, bleiben für uns ausser Betracht, weil die dort behandelten Rotationsflächen keine Cycliden mehr sind.

bezeichnen, nämlich eine beliebige Fläche vierter Ordnung, welche den Kugelkreis als Doppelcurve besitzt; die besondere Fläche wird demgegenüber als Dupin'sche Cyclide zu bezeichnen sein*).

Nachdem es sich herausgestellt hatte, dass alle metrischen Eigenschaften als Beziehungen zum Kugelkreise aufgefasst werden können, haben sich in den sechziger Jahren Laguerre, Moutard und Darboux ganz besonders mit der Theorie der Cycliden beschäftigt. Vor Allem wurde damals das Orthogonalsystem, welches aus allgemeinen confocalen Cycliden besteht**), gleichzeitig von Moutard und Darboux entdeckt. Diese dreifach orthogonale Flächenschaar benutzte Darboux dann, um ein System krummliniger Coordinaten zu definiren, welche wir als *cyclidische Coordinaten* bezeichnen werden.

Es ist aber das Hauptverdienst dieses Mathematikers, ein Instrument geschaffen zu haben, welches zunächst zwar nur zum Studium der Cycliden dienen sollte, welches aber, wie wir bald sehen werden, in der Geometrie und mathematischen Physik überhaupt eine wichtige Rolle spielt. Dieses Instrument ist das System der *pentasphärischen Coordinaten*, mit welchem wir uns im ersten Abschnitte ausführlich beschäftigen werden. Die grosse Analogie zwischen den Formeln, welche beim Gebrauch dieser Coordinaten auftreten, und den Formeln der Liniengeometrie, welche früher von Klein entwickelt worden waren***), ist sofort ersichtlich und wurde von Klein in einem Aufsatz über *Liniengeometrie und metrische Geometrie* †) ausführlich erklärt und discutirt. Insbesondere wird dort die Theorie der Cyclide mit der Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades in engste Verbindung gebracht.

Die Liniencomplexe zweiten Grades sind von Klein in seiner Dissertation (1868) ††) hinsichtlich der sämmtlichen Specialfälle, welche sie darbieten können, untersucht worden. Hierzu wurde die Weierstrassische Theorie der Elementartheiler herangezogen. Ganz ent-

---

*) Die Dupin'schen Cycliden sind gegenüber den allgemeinen Cycliden dadurch specialisirt, dass sie vier Doppelpunkte haben (von denen höchstens zwei reell sein können). — Vergl. wegen der folgenden Angaben über Cycliden insbesondere Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* Paris 1873.

**) Zwei Cycliden werden confocal genannt, wenn sie (wie zwei confocale Flächen zweiten Grades) in dieselbe den Kugelkreis enthaltende Developpable eingeschrieben sind; vergl. übrigens die Formeln des ersten Abschnitts.

***) Math. Ann. Bd. 2, 1869.

†) Math. Ann. Bd. 5, 1871.

††) Wieder abgedruckt in Math. Ann. Bd. 23. — Vergl. auch die Arbeit von Weiler Math. Ann. Bd. 7, 1873.

sprechende Untersuchungen für die Cyclide wurden später (1884) von Loria in seiner Abhandlung *Geometria della sfera* *) durchgeführt. Indess lässt der Letztere dabei die Realitätsbetrachtungen bei Seite, die Klein für die Complexe entwickelt hatte; dieselben wurden erst von Klein selbst in einer sofort zu nennenden Vorlesung über Lamé'sche Functionen auf Cycliden übertragen.

Diese Theorie der Cycliden in Verbindung mit dem obengenannten Oscillationsprincip soll nun die Grundlage für die folgende Darstellung geben. Es handelt sich dabei um die Durchführung eines Gedankenganges, welchen bereits Herr Klein in seiner Vorlesung über Lamé'sche Functionen W. S. 1889—90 skizzirt hat. Auch in den Einzelheiten werden wir uns oft an die Entwickelungen dieser Vorlesung anschliessen können, was wir jedesmal durch ein (K) andeuten wollen.

Gleich nach Schluss jener Vorlesung hat Klein einen Aufsatz veröffentlicht **), in welchem aber weniger die physikalischen Tendenzen der Vorlesung, als die functionentheoretischen (auf welche wir im vorliegenden Werke nicht eingehen werden) zum Ausdruck kamen. Andererseits wurde am 4. Juni 1890 folgende Preisaufgabe von der philosophischen Facultät der Göttinger Universität gestellt:

„Man kann die Mehrzahl der in der Potentialtheorie auftretenden Reihenentwickelungen und Integraldarstellungen unter einheitlichem Gesichtspunkt ableiten, indem man die sämmtlichen bei diesen Darstellungen in Betracht kommenden Orthogonalsysteme als Ausartungen des Systems confocaler Cycliden betrachtet und unter Zugrundelegung des letzteren zunächst für einen von sechs confocalen Cycliden begrenzten Körper geeignete Reihenentwickelungen aufstellt. Die Facultät wünscht, dass der hiermit bezeichnete Gedanke ins Einzelne durchgeführt, auch von der ganzen Theorie eine zusammenhängende Darstellung gegeben werde.“

Dieser Preis wurde der Schrift des Verfassers „Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie“, Göttingen 1891, ertheilt. Das vorliegende Buch ist als Umarbeitung und Weiterführung jener Preisarbeit anzusehen.

An specifischen Kenntnissen werden in dem vorliegenden Werke ausser analytischer Geometrie und Differential- und Integralrechnung nur noch einige wenige Sätze der Functionentheorie und der Potentialtheorie als bekannt vorausgesetzt. Indessen konnte es nicht in meiner Absicht liegen, eine *Einführung* in die Theorie der mathematisch-

*) Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino. Ser. II, Tom. 36.

**) Göttinger Nachrichten März 1890. Wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. 38.

physikalischen Reihenentwickelungen zu geben, wie man sie in den älteren Lehrbüchern von Riemann-Hattendorf: „Partielle Differentialgleichungen etc.“ und Mathieu: „Physique mathématique“, oder in dem soeben erschienenen Lehrbuch von Byerly: „Fourier's Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics“ (Boston), finden wird. Da ich aber in erster Linie für einen mathematisch-physikalischen Leserkreis schreibe, hielt ich es für angemessen, diejenigen Methoden, welche solchen Lesern weniger geläufig sein dürften, ausführlich zu behandeln. Aus diesem Grunde ist namentlich Kapitel 1 des ersten Abschnittes vorausgeschickt, welcher nur elementare Sachen enthält die anderwärts wohlbekannt sind.

Erster Abschnitt.

Geometrisches über confocale Cyclidenschaaren.

Kapitel 1.

Ueber einige Methoden und Grundsätze der projectiven Geometrie.

§ 1. Ueber homogen gemachte Cartesische Coordinaten und die daraus entspringende geometrische Ausdrucksweise.

In vielen geometrischen Untersuchungen ist es bequem, anstatt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten X, Y in der Ebene, sog. *homogene* Coordinaten x, y, t zu gebrauchen, welche nur insofern bestimmt sind als $\frac{x}{t} = X$, $\frac{y}{t} = Y$. Für einen bestimmten Punkt der Ebene sind also die zwei Verhältnisse $x:y:t$ bestimmt, nicht aber die Werthe der Coordinaten selber*), von welchen wir nur festsetzen wollen, dass sie nicht alle gleichzeitig verschwinden, und dass keine derselben unendlich werden soll.

Die so eingeführten Coordinaten tragen deshalb den Namen „homogen", weil beim Gebrauch derselben alle Curvengleichungen homogen werden. Die Gleichung der geraden Linie:

$$AX + BY + C = 0$$

nimmt, z. B. wenn man $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$ setzt und mit t heraufmultiplicirt, die Gestalt an:

$$Ax + By + Ct = 0.$$

In derselben Weise nimmt die Gleichung des Kegelschnittes:

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$

in den Coordinaten x, y, t die Form an:

*) Diese Unbestimmtheit können wir dazu gebrauchen, eine der drei Coordinaten nach Belieben anzunehmen; namentlich können wir t den constanten Werth 1 geben, wodurch x, y zu gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten werden.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxt + Eyt + Ft^2 = 0;$$

und wir können allgemein sagen:

Die allgemeine Curve n^{ter} Ordnung wird durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in x, y, t dargestellt.

Es gilt offenbar auch umgekehrt, dass jede homogene Gleichung n^{ten} Grades in x, y, t eine Curve n^{ter} Ordnung darstellt. Dabei ist aber zu bemerken, dass die homogene Gleichung ersten Grades: $t = 0$ eine Ausnahme macht, indem sie nicht nur keine gerade Linie darstellt, sondern überhaupt keine geometrische Bedeutung hat. Um diese Ausnahme zu vermeiden, verfährt man gerade wie beim Auftreten des Imaginären in der Coordinatengeometrie überhaupt, indem man der Analysis zu Gefallen von einer Geraden $t = 0$ spricht. Dieselbe werden wir aber nicht imaginär nennen, sondern unendlich weit, dem Umstande entsprechend, dass diese Gleichung die Grenzform der Gleichung einer geraden Linie ist, welche ins Unendliche rückt. Wir werden also sagen:

Die Gleichung $t = 0$ stellt die unendlich ferne Gerade dar.

Andererseits stellt jede homogene Gleichung n^{ten} Grades, welche die ν^{te} Potenz von t als Factor enthält eine Curve dar, welche nur von der $(n - \nu)^{ten}$ Ordnung ist. Dem Gesagten zufolge werden wir aber von einer solchen Gleichung sagen, sie stelle eine zerfallende Curve n^{ter} Ordnung dar, welche aus der soeben erwähnten Curve $(n - \nu)^{ter}$ Ordnung und der ν-fach zu zählenden unendlich fernen Geraden besteht.

Besonders wichtig sind die (imaginären) Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden mit einem Kreise:

$$x^2 + y^2 + axt + byt + ct^2 = 0.$$

Diese Punkte haben die merkwürdige Eigenschaft, völlig unabhängig von den Coefficienten a, b, c des Kreises zu sein*), so dass wir sagen können:

Es giebt zwei besondere imaginäre Punkte auf der unendlich fernen Geraden, durch welche alle Kreise der Ebene hindurchgehen. Dieselben werden als ***Kreispunkte*** *bezeichnet.*

Ganz analog können wir auch im Raume verfahren, indem wir dort an Stelle der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten X, Y, Z homogene Coordinaten x, y, z, t einführen vermittelst der Gleichungen:

---

*) In der That sind die Verhältnisse $x : y : t$ für diese zwei Schnittpunkte, wie man leicht nachrechnet: $1 : \sqrt{-1} : 0$ und $1 : -\sqrt{-1} : 0$.

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}.$$

Dann wird eine Ebene durch eine homogene Gleichung ersten Grades:

$$Ax + By + Cz + Dt = 0$$

dargestellt, und überhaupt eine Fläche n^{ter} Ordnung durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades. Hiernach werden wir sagen, dass die Gleichung $t = 0$, welche keine directe geometrische Bedeutung hat, *die unendlich ferne Ebene* darstellt. Den (imaginären) Schnitt dieser Ebene mit einer Kugel werden wir natürlich als Kreis bezeichnen, und man zeigt leicht, dass er für alle Kugeln derselbe ist. Deshalb geben wir ihm den Namen *Kugelkreis*.

§ 2. Ueber Tetraedercoordinaten*).

Es seien p, q, r, s die Abstände eines Punktes im Inneren eines Tetraeders von den vier Seitenflächen desselben, und es seien x_1, x_2, x_3, x_4 Grössen, welche den Grössen p, q, r, s proportional sind, also:

$$\varrho x_1 = p, \quad \varrho x_2 = q, \quad \varrho x_3 = r, \quad \varrho x_4 = s,$$

wo ϱ einen völlig unbestimmten Proportionalitätsfactor bedeutet. Dann bestimmen offenbar die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4, oder vielmehr ihre drei Verhältnisse die Lage des Punktes, und heissen dementsprechend seine *Tetraedercoordinaten*. Wir werden natürlich verabreden, dass jede dieser Coordinaten beim Ueberschreiten der entsprechenden Seitenfläche des Coordinatentetraeders ihr Vorzeichen wechselt.

Noch allgemeiner aber werden wir die Tetraedercoordinaten im Folgenden immer definirt denken, nämlich nicht mit den Abständen p, q, r, s selber, sondern mit beliebig aber fest zu wählenden Vielfachen derselben proportional. Also:

$$\varrho x_1 = c_1 p, \quad \varrho x_2 = c_2 q, \quad \varrho x_3 = c_3 r, \quad \varrho x_4 = c_4 s,$$

wo c_1, c_2, c_3, c_4 Constante bedeuten.

Die so definirten Coordinaten stimmen nun in den wesentlichsten Eigenschaften mit den im vorigen Paragraphen besprochenen homogenen Coordinaten x, y, z, t überein**), indem Flächen n^{ter} Ordnung durch homogene Gleichungen n^{ten} Grades in x_1, x_2, x_3, x_4 dargestellt werden. Es wird insbesondere jede Gleichung von der Form:

---

*) Wir überspringen der Kürze halber die Dreieckscoordinaten in der Ebene.

**) Letztere sind sogar nur ein Grenzfall von Tetraedercoordinaten, worin die Seitenflächen des Coordinatentetraeders drei zu einander senkrechte Ebenen, nämlich die Coordinatenebenen, und die unendlich ferne Ebene sind.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

eine Ebene darstellen, falls wir gegebenen Falls auch die unendlich ferne Ebene in Betracht ziehen wollen*).

Es sei noch die abgekürzte Form erwähnt, in welcher die Gleichung der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung geschrieben werden kann, nämlich:

$$\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k a_{ik} x_i x_k = 0.$$

In dieser Gleichungsform, welche wir im Folgenden vielfach gebrauchen werden, wollen wir ein für alle Mal verabreden, dass $a_{ik} = a_{ki}$ sein soll, was ja den Coefficienten der Gleichung keinerlei Beschränkung auferlegt. Ein Vortheil dieser Schreibweise besteht darin, dass die *Discriminante* der Fläche zweiter Ordnung, d. h. diejenige Funktion ihrer Coefficienten, deren Verschwinden die Bedingung dafür abgiebt, dass die Fläche in einen Kegel ausartet, die einfache Determinantenform hat:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe werden wir oft der Kürze halber schreiben: $| a_{ik} |$.

Es möge auch die Gleichung der Tangentialebene der Fläche:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

im Punkt (y_1, y_2, y_3, y_4) Platz finden (bezw. wenn dieser Punkt nicht auf der Fläche liegt, der Polarebene desselben). Diese Gleichung lautet:

$$\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k a_{ik} y_i x_k = 0.$$

An dieser Stelle wollen wir nur eine Anwendung von dieser letzten Formel machen. Wir definiren zunächst:

Ein Polartetraeder einer Fläche zweiter Ordnung ist ein Tetraeder, in welchem jede Seitenfläche Polarebene der gegenüberliegenden Ecke ist.

Dann folgt sofort aus der oben angegebenen Gleichung der Polarebene:

---

*) Dieselbe wird natürlich nicht (wie bei den Coordinaten x, y, z, t) durch eine besonders einfache Gleichung dargestellt. Die Coefficienten dieser Gleichung werden vielmehr von dem besonderen in Betracht gezogenen System von Tetraedercoordinaten abhängen.

Eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung die Form hat:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$

ist auf ein Polartetraeder als Coordinatentetraeder bezogen.

Umgekehrt ist es auch nicht schwer zu zeigen, dass die Gleichung jeder Fläche zweiter Ordnung von nicht verschwindender Discriminante auf diese Form gebracht wird, sobald man als Coordinatentetraeder irgend ein Polartetraeder nimmt.

Selbstverständlich kann man durch passende Wahl des Coordinatentetraeders die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung auf viele andere einfache Formen bringen. Hiervon erwähnen wir zwei, die für uns im Folgenden wichtig sein werden.

Erstens kann man das Tetraeder so wählen, dass die Seitenflächen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken sind, während die Seitenflächen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die Fläche in den anderen zwei Ecken berühren. Dann lautet die Flächengleichung:

$$A x_1 x_2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Zweitens können wir das Coordinatentetraeder so annehmen, dass jede seiner Seitenflächen die Fläche in einer Ecke des Tetraeders berührt. Sofern das Tetraeder reell sein soll, ist dies offenbar nur möglich, falls die geradlinigen Erzeugenden der Fläche reell sind, in welchem Falle aber das Tetraeder dadurch sofort herzustellen ist, dass man irgendwelche vier Erzeugenden, zwei der einen und zwei der anderen Art, als vier Kanten des Tetraeders annimmt. Auf dieses Tetraeder bezogen, hat die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung die Gestalt:

$$A_1 x_1 x_2 + A_2 x_3 x_4 = 0.$$

Schliesslich wird es später für uns wichtig sein, die Formeln zu kennen, durch welche man von einem System x_1, x_2, x_3, x_4 von Tetraedercoordinaten zu einem anderen $x_1', x_2', x_3' x_4'$ übergeht. Dieselben lauten einfach:

$$\varrho x_i' = \sum_1^4{}^k \alpha_{ik} \cdot x_k,$$

wo aber *nicht* vorausgesetzt werden darf, dass $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

§ 3. Ueber Büschel von Flächen zweiter Ordnung.

Es seien:

$$\Omega \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$
$$\Phi \equiv \Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$$

irgend zwei Flächen zweiter Ordnung; wir betrachten den Flächenbüschel:

$$\lambda\Omega - \Phi = 0,$$

d. h.

$$\Sigma(\lambda a_{ik} - b_{ik}) x_i x_k = 0.$$

Dieser Büschel besteht natürlich, indem man dem Parameter λ der Reihe nach alle möglichen Werthe ertheilt, aus allen Flächen zweiter Ordnung, welche durch eine gewisse räumliche Curve vierter Ordnung hindurch gehen, nämlich durch die Schnittcurve der Flächen Ω und Φ.

Nun ist es eine für uns wichtige Frage, wie viele Kegel in diesem Büschel enthalten sind. Die Bedingung dafür, dass eine Fläche zweiter Ordnung in einen Kegel ausartet, besteht, wie schon gesagt, im Verschwinden ihrer Discriminante. Damit also ein Kegel im Büschel auftreten soll, muss λ einen Werth haben, welcher der Gleichung genügt:

$$| \lambda a_{ik} - b_{ik} | = 0.$$

Diese Gleichung ist aber vom vierten Grade in λ und hat also im allgemeinen vier verschiedene Wurzeln. *Ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung enthält also im allgemeinen vier Kegel.*

Die Spitzen dieser Kegel bilden die Ecken eines Tetraeders, welches wir mit Vortheil als Coordinatentetraeder benutzen können. In der That haben die Gleichungen zweier Kegel, deren Spitzen in den Ecken $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bezw. $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ liegen, offenbar die Gestalt:

$$K = c_1\, x_1^2 + c_2\, x_2^2 + c_3\, x_3^2 + A\, x_1 x_2 + B\, x_2 x_3 + C\, x_3 x_1 = 0,$$

bezw.

$$K' = c_2' x_2^2 + c_3' x_3^2 + c_4' x_4^2 + B' x_2 x_3 + D' x_3 x_4 + E' x_4 x_2 = 0.$$

Zur Herstellung der Gleichung des Büschels können aber ebensogut die zwei Kegel K und K' dienen, wie irgendwelche andere zwei Flächen des Büschels. Diese Gleichung können wir also schreiben:

$$K - \lambda K' = 0.$$

Durch passende Wahl des Parameters λ muss man dann jede Fläche des Büschels bekommen können, also insbesondere denjenigen Kegel des Büschels, dessen Spitze in der Ecke $x_3 = x_4 = x_1 = 0$ liegt. Die Gleichung dieses Kegels enthält keine Glieder mit $x_1 x_2$ und $x_4 x_2$; damit aber diese Glieder aus der Gleichung $K - \lambda K' = 0$ herausfallen können, ist es nothwendig, dass die Coefficienten A und E' in K und K' selber verschwinden. Auf ganz dieselbe Weise zeigt man, dass $B = C = B' = D' = 0$. Folglich hat die Gleichung des Flächenbüschels die Gestalt:

$$c_1 x_1^2 + (c_2 - \lambda c_2')x_2^2 + (c_3 - \lambda c_3')x_3^2 - \lambda c_4' x_4^2 = 0.$$

Die Gleichung einer jeden Fläche des Büschels enthält also nur die Quadrate der Coordinaten, und wir können sagen:

Die Spitzen der vier im Büschel enthaltenen Kegel bilden die Ecken eines dem ganzen Büschel gemeinsamen Polartetraeders.

Zugleich haben wir den Satz bewiesen:

Ein beliebig gewähltes Paar von Flächen zweiter Ordnung hat im allgemeinen ein gemeinsames Polartetraeder.

Es ist leicht zu sehen, dass im allgemeinen auch nur ein solches Tetraeder existirt.

§ 4. Ueber Collineation.

Die eigentliche Grundlage der projectiven Geometrie bildet die Transformation, von welcher wir in diesem Paragraphen handeln wollen, und welche wir folgendermassen definiren:

Eine Collineation ist eine Transformation, welche jeden Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) *in einen anderen Punkt* (x_1', x_2', x_3', x_4') *derart überführt, dass die neuen Tetraedercoordinaten des betreffenden Punktes ganzen linearen Functionen der alten proportional sind.*

Die Transformation wird also durch Formeln folgender Gestalt ausgedrückt:

$$\varrho x_i' = \sum_1^4{}^k \alpha_{ik} x_k,$$

(wo natürlich α_{ik} und α_{ki} im allgemeinen zwei *verschiedene* Constanten sind). Es ist wichtig, die Uebereinstimmung dieser Formeln mit den Formeln für die Coordinatentransformation (Seite 12) zu bemerken. Der Unterschied liegt natürlich darin, dass x_i und x_i' jetzt zwei verschiedene Punkte sind, bezogen auf ein und dasselbe Coordinatensystem, während damals x_i und x_i' ein und denselben Punkt darstellten, bezogen auf zwei verschiedene Coordinatensysteme.

Aus bekannten algebraischen Sätzen wissen wir, dass umgekehrt die x_i ganzen linearen Functionen der x_i' proportional sein werden, *falls nicht die Determinante* $|\,a_{ik}\,|$ *der Coefficienten verschwindet.*

Im Folgenden wollen wir immer annehmen, dass diese Determinante nicht verschwindet, um die Merkwürdigkeit zu vermeiden, dass die Collineation den ganzen Raum in eine einzige Ebene transformirt.

Die wichtigsten Eigenschaften der Collineation lassen sich direct aus der oben gegebenen Definition derselben ableiten. Zunächst sehen wir, da die Transformationsformeln vom ersten Grade sind, dass *jede*

Ebene in eine andere Ebene übergeht. Da nun eine Gerade als Schnitt zweier Ebenen angesehen werden kann, so folgt hieraus, dass *jede Gerade in eine Gerade übergeht,* eine Eigenschaft, von welcher der Name Collineation selber entnommen ist.

Aber noch allgemeiner können wir aus demselben Grunde sagen: *Die Ordnung einer beliebigen Curve oder Fläche wird durch Collineation nicht geändert.* Oder wie man sich auch häufig ausdrückt: die Ordnung von Curven und Flächen ist bei Collineation *invariant* *).

Jede Collineation hat sechzehn Coefficienten, hiervon sind aber offenbar nur die fünfzehn Verhältnisse wesentlich, und dies drücken wir dadurch aus, dass wir sagen:

Es giebt ∞^{15} Collineationen des Raumes.

Diese 15 wesentlichen Constanten können natürlich auf sehr verschiedene Weisen bestimmt werden; so z. B. dadurch, dass man verlangt, die Collineation solle fünf gegebene Punkte bezw. in fünf andere gegebene Punkte überführen. Für uns ist es aber wichtiger zu bemerken, dass die Coefficienten der Transformation so bestimmt werden können (und zwar auf unendlich viele Weisen), dass eine gegebene Fläche zweiter Ordnung in eine andere gegebene Fläche zweiter Ordnung übergeht. In der That hat jede Fläche zweiter Ordnung 9 wesentliche Coefficienten. Wenn also eine gegebene Fläche zweiter Ordnung in eine andere übergeführt werden soll, werden wir 9 Bedingungsgleichungen zwischen den 15 Coefficienten der Transformation haben. Hiernach sagen wir:

Es giebt ∞^6 Collineationen, welche eine gegebene Fläche zweiter Ordnung in eine andere gegebene Fläche zweiter Ordnung überführen **).

Ein wichtiger Specialfall hiervon ist:

Es giebt ∞^6 Collineationen, welche eine gegebene Fläche zweiter Ordnung in sich selbst überführen.

Noch eine sehr specielle Collineation haben wir zu besprechen, welche wir als *projective Spiegelung* bezeichnen wollen. Betrachten wir die Collineation: $\varrho x_1' = -x_1$, $\varrho x_2' = x_2$, $\varrho x_3' = x_3$, $\varrho x_4' = x_4$, wo die drei Coordinaten x_2, x_3, x_4 nicht geändert werden, die vierte x_1

---

*) Eine zweite wichtige Invarianteneigenschaft der Collineation bezieht sich auf den Begriff des *Doppelverhältnisses*. Da wir dieselbe aber späterhin nur beiläufig gebrauchen werden, gehen wir an dieser Stelle nicht näher darauf ein.

**) Die einfache Constantenabzählung des Textes ist freilich nicht genügend, um diesen Satz streng zu beweisen. Hierüber vergl. man Clebsch-Lindemann „Geometrie“ Bd. II, S. 356.

aber das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Diese Transformation lässt offenbar jeden Punkt der Ebene $x_1 = 0$, sowie auch den Punkt $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ungeändert, und wir wollen sie als *projective Spiegelung in Bezug auf diese Ebene und diesen Punkt* bezeichnen. Die Natur der Transformation sieht man mit Leichtigkeit ein. Zunächst wird, da die Coordinaten x_2, x_3, x_4 nicht geändert werden, jeder Punkt P mit einem Punkte P' derart vertauscht, dass die Gerade PP' durch den Punkt $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ hindurchgeht. Dann aber findet man ferner, etwa durch directe Nachrechnung von der ursprünglichen Definition der Tetraedercoordinaten ausgehend, dass, wenn man durch Q den Punkt bezeichnet, in welchem die Ebene $x_1 = 0$ von der Geraden PP' geschnitten wird, die Punkte $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ und Q durch die Punkte PP' harmonisch getheilt sind. Wir können also folgendermassen definiren:

Als projective Spiegelung in Bezug auf eine Ebene E und einen Punkt R bezeichnen wir die Transformation, welche darin besteht, jeden Punkt P mit demjenigen Punkte P' zu vertauschen, welcher auf der Geraden PR liegt, und (wenn Q den Schnittpunkt dieser Geraden und der Ebene E bezeichnet) mit RPQ den vierten harmonischen Punkt bildet.

Die Benennung „projective Spiegelung" hat natürlich ihre Berechtigung darin, dass diese Transformation die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spiegelung ist. In der That, wenn der Punkt R der unendlich ferne Punkt einer auf E senkrechten Geraden ist, haben wir gewöhnliche Spiegelung in Bezug auf die Ebene E.

Zum Schlusse dieses Kapitels kehren wir zur Ueberschrift desselben zurück, indem wir folgendermassen definiren:

Die projective Geometrie beschäftigt sich nur mit solchen geometrischen Eigenschaften von Figuren, welche in Bezug auf Collineation invariant sind.

Hierauf gehen wir im zweiten Paragraphen des nächsten Kapitels näher ein.

Natürlich kann die Collineation ohne Gebrauch von Tetraedercoordinaten, etwa auf rein synthetischem Wege, definirt werden, und folglich auch die ganze projective Geometrie unabhängig von den Tetraedercoordinaten aufgebaut werden. Dieses Coordinatensystem ist aber das natürlichste analytische Instrument zur Behandlung der projectiven Geometrie.

Auch spricht man in der projectiven Geometrie von der unendlich fernen Ebene, ganz abgesehen vom System der Tetraedercoor-

dinaten, weil bei einer Collineation das Unendlichferne die Rolle einer Ebene spielt, d. h. sämmtliche unendlich ferne Punkte gehen in die Punkte einer einzigen Ebene über, während eine andere Ebene ganz ins Unendliche geworfen wird.

Kapitel 2.

Ueber die Geometrie der reciproken Radien.

§ 1. Ueber Inversion.

Die Transformation durch reciproke Radien oder Inversion, welche im Folgenden eine Hauptrolle spielen wird, besteht bekanntlich darin, dass ein beliebiger Punkt O als Pol angenommen und dann jeder Punkt P mit einem Punkt P' in der Weise vertauscht wird, dass die Punkte OPP' auf einer Geraden liegen, und das Product $OP \cdot OP'$ einen constanten Wert hat, den man häufig der Einfachheit halber gleich 1 wählt, welchen wir aber mit a^2 bezeichnen wollen.

Es ist klar, dass bei dieser Transformation jeder Punkt der Kugel mit dem Radius a und mit O als Mittelpunkt ungeändert bleibt, während das Innere dieser Kugel mit dem Aeusseren derselben vertauscht wird. Insbesondere wird der Mittelpunkt dieser Kugel ins Unendliche geworfen, während sämmtliche unendlich ferne Punkte in den einen Punkt O übergehen. Hiernach spricht man bei der Inversion von *dem unendlich fernen Punkte*, nicht wie bei der Collineation von der unendlich fernen Ebene.

Nun hat bekanntlich die Inversion folgende zwei Grundeigenschaften, welche wir sofort als Invarianteneigenschaften erkennen:

1) *Jede Kugel geht durch Inversion in eine Kugel über.*

2) *Der Winkel, welchen zwei Curven oder Flächen mit einander bilden, wird durch eine Inversion nicht geändert.*

Damit der erste dieser zwei Sätze ganz allgemein seine Gültigkeit behält, muss man allerdings unter den Namen Kugel auch die unendlich grosse Kugel, d. h. die Ebene verstehen, denn sofern eine Kugel durch das Inversionscentrum O hindurch geht, wird sie in eine Ebene transformirt, und umgekehrt geht jede Ebene in eine Kugel durch O über.

Da ferner die Schnitte von Kugeln Kreise sind, folgt unmittelbar aus dem ersten der oben angeführten Sätze, dass, sofern man nur

eine gerade Linie als unendlich grossen Kreis ansieht, *Kreise bei Inversion allgemein in Kreise übergehen.*

Obwohl die oben gegebene Definition der Inversion vom elementaren Standpunkte aus als die einfachste erscheint, so wollen wir doch noch eine zweite geben, welche den Vortheil hat, nur von Kugeln, Kreisen und Winkeln Gebrauch zu machen, nicht aber von Längenmessungen, welch' letztere ja in Bezug auf Inversion nicht invariant sind. Hierzu schicken wir zunächst folgende Definition voraus:

Zwei Punkte heissen symmetrisch in Bezug auf eine Kugelfläche, wenn sämmtliche durch beide Punkte hindurchgehende Kreise die Kugel orthogonal schneiden.

Wenn man diese Definition auf eine Ebene anwendet, bekommt man offenbar die gewöhnliche Symmetrie.

Gerade wie man nun gewöhnlich von einer Spiegelung in Bezug auf eine Ebene spricht, so werden wir jetzt verallgemeinernd diejenige Transformation als *Spiegelung in Bezug auf eine Kugelfläche* bezeichnen, welche darin besteht, dass jeder Punkt in denjenigen Punkt übergeführt wird, welcher mit ihm in Bezug auf die betreffende Kugelfläche symmetrisch liegt; und nun zeigt man leicht, dass *Spiegelung in Bezug auf eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt in O und mit dem Radius a genau mit der oben besprochenen Inversion übereinstimmt.*

Hierin haben wir denn die oben versprochene neue Definition der Inversion.

Da ferner die soeben besprochene Symmetrie vermöge Kreise, Kugeln und Winkel definirt ist, sehen wir, dass: *wenn zwei Punkte symmetrisch in Bezug auf eine Kugelfläche liegen, sie auch nach einer beliebigen Inversion symmetrisch in Bezug auf die invertirte Kugelfläche liegen werden.*

§ 2. **Ueber verschiedene Arten der Geometrie** *).

Ehe wir jetzt zur Geometrie der reciproken Radien übergehen, müssen wir einige Worte über zwei andere geometrische Systeme vorausschicken, nämlich über die *elementare Geometrie* und die *projective Geometrie.* Wir behaupten dann zunächst Folgendes:

---

*) In diesem Paragraphen haben wir einige von den Auffassungen zu besprechen, welche von F. Klein in seinem Erlanger Programm: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. 43) bereits im Jahre 1872 entwickelt sind. Dieselben Ideeen hat Herr Klein neuerdings in seinen autographirten Vorlesungen über höhere Geometrie (zwei Hefte, 1892—93) in neuer Bearbeitung dargestellt.

In der elementaren Geometrie betrachtet man alle diejenigen Eigenschaften einer Figur als geometrisch wesentlich, welche durch beliebige Bewegungen, Aehnlichkeitstransformationen und Spiegelungen) des Raumes nicht geändert werden, alle anderen Eigenschaften aber als unwesentlich.*

Durch diesen Satz soll nur die fast triviale Thatsache betont werden, dass die Lage einer Figur, und die Grösse des Massstabs, nach welchem sie gezeichnet ist, keinen Einfluss auf die geometrischen Eigenschaften der Figur haben, und dass schliesslich die Drehrichtungen rechts herum und links herum nur insofern von einander geometrisch unterschieden werden können, als die eine die entgegengesetzte von der anderen ist.

Jetzt fahren wir fort, indem wir sagen:

In der projectiven Geometrie betrachtet man nur solche Eigenschaften von Figuren als geometrisch wesentlich, welche nicht bloss in Bezug auf die soeben genannten elementaren Transformationen des Raumes, sondern auch in Bezug auf beliebige Collineation invariant sind.

Es ist also zunächst in der projectiven Geometrie keine Rede von den *metrischen* Eigenschaften der vorgelegten Figuren, da dieselben durch eine Collineation vollständig geändert werden. Andererseits sind zwei Figuren als im Wesentlichen identisch anzusehen, wenn durch eine Collineation die eine in die andere übergeführt werden kann. So ist z. B. zwischen einer Ellipse oder Hyperbel und einem Kreise nicht zu unterscheiden, trotzdem sie vom elementar-geometrischen Standpunkte aus ganz verschiedene Eigenschaften besitzen.

Wir kommen jetzt zur Geometrie der reciproken Radien, wo wir ausser den elementaren Transformationen (Bewegungen, Aehnlichkeitstransformationen und Spiegelungen) noch die Inversion betrachten. Die Gesammtheit der soeben genannten Transformationen bezeichnen wir, dem Sprachgebrauche von Möbius folgend, als Kreisverwandtschaften, indem sie unter allen anderen Punkttransformationen**) dadurch charakterisirt sind, dass sie jeden Kreis des Raumes in einen anderen Kreis überführen. Wir bezeichnen nun mit folgenden Worten den Gesichtspunkt der Geometrie der reciproken Radien***):

---

*) Es soll hier wie überall, wo nicht ausdrücklich von Spiegelung an Kugelflächen oder von projectiver Spiegelung die Rede ist, unter Spiegelung gewöhnliche Spiegelung in Bezug auf eine Ebene verstanden sein.

**) D. h. Transformationen, welche Punkte in Punkte überführen.

***) Man bemerke, dass wir die elementaren Transformationen, von denen es ∞^7 giebt, nach zwei verschiedenen Richtungen hin erweitert haben; erstens zu der Gesammtheit der Collineationen, von denen es ∞^{15} giebt, und zweitens zu der Gesammtheit der Kreisverwandtschaften, von denen es ∞^{10} giebt. Hiernach

In der Geometrie der reciproken Radien betrachtet man nur solche Eigenschaften von Figuren als geometrisch wesentlich, welche in Bezug auf beliebige Kreisverwandtschaft invariant sind.

Wir brauchen an dieser Stelle nicht näher auf die Eigenschaften einzugehen, welche in Bezug auf Kreisverwandtschaft invariant sind, da dieselben offenbar mit denjenigen übereinstimmen, welche in Bezug auf Inversion invariant sind, und welche wir im vorigen Paragraphen besprochen haben. Selbstverständlich werden wir auch in der Geometrie der reciproken Radien von dem unendlich fernen *Punkte* sprechen, nicht wie in der projectiven Geometrie von der unendlich fernen *Ebene.*

Es mag aber noch bemerkt werden, dass in der Geometrie der reciproken Radien der Unterschied zwischen Kugel und Ebene, sowie auch zwischen Kreis und Gerade nur ein unwesentlicher ist, insofern jede Kugel in jede Ebene durch Kreisverwandtschaft übergeführt werden kann, oder wie wir kurz sagen wollen: jede Kugel ist mit jeder Ebene *kreisverwandt.* Aehnliches gilt von Kreis und Gerade. Vom Standpunkte der Geometrie der reciproken Radien aus besteht offenbar der Unterschied zwischen Kugel und Ebene darin, dass eine Ebene durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht, eine gewöhnliche Kugel nicht. Ebenso ist eine Gerade als Kreis zu betrachten, welcher durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht.

Ehe wir übrigens auf die Geometrie der reciproken Radien näher eingehen, wollen wir ein Coordinatensystem einführen, welches zur Behandlung der sich nunmehr aufdrängenden Fragen ebenso geeignet ist, wie es die Tetraedercoordinaten zur Behandlung der projectiven Geometrie sind. Dies wollen wir aber zunächst für die Geometrie der reciproken Radien in zwei Dimensionen (d. h. in der Ebene) ausführen. Hier werden wir natürlich gerade wie im Raume von *dem unendlich fernen Punkte* sprechen, während die unendlich ferne Gerade der projectiven Geometrie, sowie auch die Kreispunkte für uns nicht existiren *).

---

sind projective Geometrie und Geometrie der reciproken Radien als nebeneinanderstehende Erweiterungen der elementaren Geometrie anzusehen. Sie sind geradezu Schwesterdisciplinen, und es braucht nicht etwa die Inversion, wie dies in den meisten Lehrbüchern geschieht, bloss als eine specielle, allerdings besonders interessante höhere Transformation im Gebiet der projectiven Geometrie aufgefasst zu werden.

*) Vergl. jedoch die Bemerkung S. 27.

§ 3. Zusammenhang zwischen der Geometrie der reciproken Radien der Ebene und der projectiven Geometrie des Raumes *).

Wir haben es in diesem Paragraphen mit Kreisverwandtschaften einer Ebene zu thun, zu deren Behandlung die stereographische Projection der Ebene auf eine Kugel ein bekanntes Hülfsmittel liefert. Fassen wir also eine Kugel von Radius Eins ins Auge, deren Mittelpunkt O in der betreffenden Ebene liegt, und bezeichnen wir als Nord- und Südpol (N und S) dieser Kugel die Punkte, in welchen sie von einer zu der Ebene in O senkrechten Geraden getroffen wird. Projiciren wir nun die Ebene auf die Kugel vermittelst Strahlen, welche durch den Nordpol der Kugel gehen. Die so hergestellte stereographische Projection können wir dann folgendermassen in Formeln ausdrücken. Es sei x, y, t ein System von homogen gemachten rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten in der Ebene mit dem Anfangspunkte in O; und es sei ξ, η, ζ, τ ein ebensolches System im Raume, wo die ξ- und η-Axen mit den x- und y-Axen des ersten Systems zusammenfallen. Dann werden die Coordinaten ξ, η, ζ, τ eines beliebigen Kugelpunktes mit den Coordinaten x, y, t des entsprechenden Punktes der Ebene durch folgende Formeln verbunden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\xi &= 2xt, \\ \varrho\eta &= 2yt, \\ \varrho\zeta &= x^2+y^2-t^2, \\ \varrho\tau &= x^2+y^2+t^2, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} \sigma x &= \xi, \\ \sigma y &= \eta, \\ \sigma t &= \tau-\zeta, \\ \xi^2+\eta^2&+\zeta^2-\tau^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese stereographische Projection hat nun bekanntermassen folgende zwei Haupteigenschaften **):

1) Kreise auf der Kugel werden in Kreise (bezw. Geraden) auf der Ebene projicirt.

2) Winkel werden durch stereographische Projection nicht geändert.

Fassen wir nun diejenigen Collineationen des Raumes ins Auge, welche unsere Kugel in sich selbst überführen. Jede solche Collineation giebt eine Transformation der Kugelfläche in sich, welcher durch die stereographische Projection eine gewisse Transformation der Ebene

*) Man vergl. neben dem soeben erwähnten Programm von Klein, dessen Aufsatz in Math. Ann. Bd. 5, „Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie".

**) Dass dem so ist, sieht man am leichtesten dadurch ein, dass man bemerkt, dass die stereographische Projection dieselbe Beziehung zwischen Ebene und Kugel herstellt, wie eine gewisse Inversion des Raumes.

in sich entspricht. Nun haben alle diese Transformationen der Kugel offenbar die Eigenschaft, dass sie sämmtliche Kreise auf der Kugel in andere Kreise überführen (denn Kreise sind ja ebene Schnitte der Kugel, und Ebenen gehen durch Collineation in Ebenen über). Dasselbe gilt also auch von den entsprechenden ebenen Transformationen, welche also in dieser wichtigen Beziehung mit den Kreisverwandtschaften übereinstimmen *). Wenn wir ferner bemerken (vgl. S. 15), dass es ∞^6 Collineationen giebt, welche eine Kugel in sich transformiren, und auch ∞^6 Kreisverwandtschaften der Ebene, so liegt es sehr nahe, die Richtigkeit folgenden Satzes zu vermuthen:

Die Gesammtheit derjenigen Raumcollineationen, welche die Kugel in sich überführen, entspricht geradezu vermittelst der stereographischen Projection der Gesammtheit der Kreisverwandtschaften der Ebene.

Oder wie wir auch kurz sagen können:

Die Geometrie der reciproken Radien der Ebene ist die stereographische Projection der projectiven Geometrie auf einer Kugelfläche.

Diesen Satz, welcher für uns späterhin von fundamentaler Bedeutung sein wird, wollen wir jetzt noch ausführlich begründen. Als ersten Schritt hierzu wollen wir den, auch an und für sich wichtigen Satz beweisen:

Jede projective Spiegelung, welche die Kugelfläche in sich transformirt, entspricht durch stereographische Projection einer Inversion der Ebene, und umgekehrt.

Man betrachte nämlich eine projective Spiegelung in Bezug auf eine Ebene E und einen Punkt R. Damit diese Spiegelung die Kugel in sich transformiren soll, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass R und E Pol und Polare in Bezug auf die Kugel sein müssen. Seien nun P und P' irgend zwei Punkte der Kugel, welche durch die projective Spiegelung mit einander vertauscht werden, und sei K der Kreis, in welchem die Kugel von der Ebene E geschnitten wird. Nun beweist man in der elementaren Stereometrie, dass jede durch R hindurchgehende Ebene die Kugel in einem Kreise schneidet, welcher senkrecht auf K steht. Folglich stehen sämmtliche Kreise der Kugel, welche durch P und P' hindurchgehen, auf K senkrecht. Wenn wir also auf die Ebene stereographisch projiciren, bekommen wir eine Transformation, welche die Punkte der Ebene derart paarweise mit einander vertauscht, dass, wenn p und p' irgend zwei Punkte sind,

*) Dass sie auch die zweite Grundeigenschaft der Kreisverwandtschaft haben, Winkel ungeändert zu lassen, könnten wir mit Leichtigkeit sehen, wenn wir, die imaginären geradlinigen Erzeugenden der Kugel berücksichtigend, auf die projective Definition des Winkels eingehen wollten.

welche sich mit einander vertauschen, alle Kreise durch dieselben einen festen Kreis k, nämlich das Bild von K, senkrecht schneiden. Wir haben es also (vergl. S. 18) mit einer Inversion zu thun.

Nun kann aber jede Kreisverwandtschaft aus einer Inversion und einer elementaren Transformation zusammengesetzt werden. Um also zu beweisen, dass jede Kreisverwandtschaft einer Collineation des Raumes entspricht, welche die Kugel in sich überführt, brauchen wir jetzt nur das Gleiche für die elementaren Transformationen zu beweisen.

Hierzu bemerken wir, dass jede elementare Transformation der Ebene aus einer Drehung derselben um einen beliebig gewählten Punkt, etwa den Mittelpunkt O der Kugel, einer Aehnlichkeitstransformation von diesem Punkte aus, einer Parallelverschiebung der Ebene in sich, und eventuell einer Spiegelung an einer durch O hindurchgehenden Geraden zusammengesetzt werden kann. Wir wollen nun zeigen, dass jede einzelne dieser Componenten einer Collineation des Raumes entspricht, die die fundamentale Kugel in sich überführt.

Dies ist für die Drehung und die Spiegelung ohne Weiteres evident, denn sie entsprechen einer Drehung des Raumes um die Axe der Kugel bezw. einer Spiegelung des Raumes an einer durch diese Axe hindurchgehenden Ebene.

Die Aehnlichkeitstransformation wird durch die Formeln:

$$\varrho x' = ax, \quad \varrho y' = ay, \quad \varrho t' = t$$

ausgedrückt, und diese Formeln ergeben sich auch, wenn wir die Kugel der Collineation:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \sigma\xi' &= a\xi, \\ \sigma\eta' &= a\eta, \\ \sigma\zeta' &= \frac{a^2+1}{2}\zeta + \frac{a^2-1}{2}\tau, \\ \sigma\tau' &= \frac{a^2-1}{2}\zeta + \frac{a^2+1}{2}\tau \end{aligned}$$

unterwerfen, und dann vermöge der Formeln von Seite 21 diese Transformation auf die Ebene übertragen.

Ebenso bekommt man die Parallelverschiebung*):

$$\varrho x' = x + at, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho t' = t$$

aus der Collineation:

---

*) Die Richtung der Parallelverschiebung kann man natürlich als x-Axe wählen, wie hier stillschweigend gethan worden ist.

$$
(\mathrm{B})\qquad
\begin{aligned}
\sigma\xi' &= \xi \qquad\qquad - a\zeta + a\tau,\\
\sigma\eta' &= \qquad \eta,\\
\sigma\zeta' &= a\xi \qquad + \frac{2-a^2}{2}\zeta + \frac{a^2}{2}\tau,\\
\sigma\tau' &= a\xi \qquad - \frac{a^2}{2}\zeta \;\; + \frac{2+a^2}{2}\tau.
\end{aligned}
$$

Hierdurch ist nun der Satz bewiesen, dass jede Kreisverwandtschaft der Ebene einer Collineation der Kugel in sich entspricht. Aber auch die Umkehrung dieses Satzes ist für uns wichtig, dass nämlich jede Collineation der Kugel in sich einer Kreisverwandtschaft entspricht. Um dies zu beweisen, verfahren wir folgendermassen: Zunächst ist es klar, dass jede Collineation der Kugel in sich als bestehend aus einer projectiven Spiegelung und einer Collineation der Kugel in sich, welche den Nordpol fest lässt, gedacht werden kann. Um unseren Satz zu beweisen, wird also dem Voraufgehenden zufolge nur noch zu zeigen sein, dass jede Collineation der Kugel in sich, welche den Nordpol ungeändert lässt, einer elementaren Transformation der Ebene entspricht.

Jede solche Collineation der Kugel in sich kann aber wieder in zwei Transformationen zerlegt werden, nämlich in eine Collineation vom Typus (B), welche einer Parallelverschiebung der Ebene entspricht, und einer Collineation der Kugel in sich, welche beide Pole fest lässt; und wir wollen jetzt zeigen, dass eine Collineation der letzten Art einer Transformation der Ebene entspricht, welche aus einer Drehung um den Punkt O, einer Aehnlichkeitstransformation von demselben Punkte aus, ev. verbunden mit einer Spiegelung an einer durch diesen Punkt hindurchgehenden Geraden zusammengesetzt ist.

Zunächst bemerken wir, dass die zu betrachtende Collineation, da sie die beiden Pole der Kugel fest lässt, auch die Tangentialebenen in diesen Punkten in sich selbst transformiren wird und folglich auch ihre Schnittlinie die unendlich ferne Gerade der $\xi\eta$-Ebene. Hieraus folgt, dass jeder Breitenkreis der Kugel in einen anderen Breitenkreis transformirt wird. Wir können hiernach die Collineation wieder in zwei Theile zerlegen, von denen der erste vom Typus (A) ist und folglich einer Aehnlichkeitstransformation der Ebene entspricht, während der zweite nebst den beiden Polen auch den Aequator in sich überführt. Dass nun diese letzte Collineation einer Drehung der Ebene um den Punkt O ev. verbunden mit einer Spiegelung entspricht, sehen wir sofort, wenn wir die Formeln einer Collineation hinschreiben, welche den obigen Bedingungen genügt.

Hiermit haben wir den Satz von Seite 22 bewiesen.

§ 4. Einführung tetracyclischer Coordinaten.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, wie man die Geometrie der reciproken Radien der Ebene auf die projective Geometrie des Raumes zurückführen kann. Nun wissen wir aber, dass zum Studium der projectiven Geometrie des Raumes man zweckmässigerweise Tetraedercoordinaten gebraucht. Wir führen daher ein beliebiges solches Coordinatensystem x_1, x_2, x_3, x_4 ein, und schreiben die Gleichung der Kugel, auf welche wir die Ebene stereographisch bezogen haben: $\Omega = 0$. Durch geeignete Wahl des Coordinatensystems kann man dieses Ω zu einer beliebigen quaternären quadratischen Form der x von nicht verschwindender Discriminante machen. Diese Coordinatenbestimmung übertragen wir dann auf die Ebene, indem wir einfach jedem Punkte der Ebene dieselben Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 zuordnen, welche der entsprechende Punkt der Kugel besitzt. Die x_1, x_2, x_3, x_4 sind dabei natürlich immer durch die Relation $\Omega = 0$ verbunden. Wir wollen dabei ausdrücklich bemerken, dass auf diese Weise nur die drei Verhältnisse der vier Coordinaten eines Punktes der Ebene bestimmt werden, so dass, da diese drei Verhältnisse noch der Relation $\Omega = 0$ unterworfen sind, wir es in Wirklichkeit mit nur zwei unabhängigen Grössen zu thun haben, wie es in der Ebene sein muss.

Indem wir nun diese Grössen x_i als Coordinaten in der Ebene benutzen wollen, ist es natürlich wünschenswerth, sie auch in der Ebene zu definiren, ohne auf den Raum Bezug zu nehmen. Zu diesem Zwecke fassen wir die vier Gleichungen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

ins Auge. Dieselben stellen im Raume vier Ebenen dar — die vier Seitenflächen des Coordinatentetraeders. Sie stellen also auf der Kugel $\Omega = 0$, und folglich auch in der Ebene, vier Kreise dar. Dementsprechend wollen wir die Coordinaten x_i in der Ebene *tetracyclische Coordinaten* nennen, und die vier Kreise $x_i = 0$ die *Grundkreise* des Coordinatensystems.

Um die Coordinaten weiter zu bestimmen, legen wir zunächst im Raume das schon früher benutzte System rechtwinkliger homogener Coordinaten ξ, η, ζ, τ zu Grunde. Aus diesem speciellen Coordinatensystem bekommt man das allgemeine System der Tetraedercoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch die lineare Substitution:

$$\varrho x_i = A_i \xi + B_i \eta + C_i \zeta + D_i \tau.$$

Zieht man nun die Formeln für die stereographische Projection (Seite 21) zu Hülfe, so sieht man, dass die tetracyclischen Coordinaten x_i eines Punktes der Ebene durch folgende Formeln vermittelst der Coordinaten x, y, t ausgedrückt werden:

$$\varrho x_i = 2A_i xt + 2B_i yt + C_i(x^2 + y^2 - t^2) + D_i(x^2 + y^2 + t^2).$$

Führen wir jetzt gewöhnliche Cartesische Coordinaten $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$ ein, so können wir schreiben:

$$\frac{\varrho}{t^2} \cdot x_i = (C_i + D_i)\left[X^2 + Y^2 + \frac{2A_i X + 2B_i Y - C_i + D_i}{C_i + D_i}\right],$$

wo $\frac{\varrho}{t^2}$ ein beliebiger allen x_i gemeinsamer Proportionalitätsfactor ist. Bedenken wir nun, dass der Werth des Ausdrucks:

$$X^2 + Y^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma$$

in einem beliebigen Punkte X, Y einfach die Potenz*) dieses Punktes ist in Bezug auf den Kreis:

$$X^2 + Y^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0,$$

so sehen wir sofort, dass wir folgendermassen definiren können:

*Die tetracyclischen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes der Ebene sind proportional beliebig zu wählenden Vielfachen der Potenzen des betreffenden Punktes in Bezug auf vier beliebig zu wählende Grundkreise**). Zwischen den so definirten Grössen besteht eine homogene quadratische Gleichung $\Omega = 0$ von nicht verschwindender Discriminante.*

Da dieser Gleichung $\Omega = 0$ durch die Coordinaten eines jeden Raumpunktes genügt wird, so wollen wir dieselbe in Zukunft eine *Identität* nennen.

Die weitere Gestalt dieser Identität $\Omega = 0$ hängt natürlich von der besonderen Wahl des Coordinatensystems ab. Hierauf gehen wir im folgenden Paragraphen näher ein.

Die Eigenschaften der tetracyclischen Coordinaten, welche natürlich aus der obenstehenden Definition direct abgeleitet werden könn-

*) Als Potenz eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis bezeichnet man nach Steiner das Product der Segmente PQ, PR einer beliebigen Secante durch P, welche den Kreis in Q und R trifft. Für Punkte innerhalb des Kreises wird diese Potenz offenbar negativ sein, für andere Punkte positiv.

**) Allerdings dürfen die vier Grundkreise nicht sämmtlich auf einem fünften reellen oder imaginären Kreise orthogonal stehen, denn dann würden alle vier Seitenflächen des Coordinatentetraeders im Raume durch einen Punkt gehen, und es würden die Coordinaten nicht mehr sämmtlich von einander linear unabhängig sein.

ten, erhält man jedoch am einfachsten durch Bezugnahme auf die stereographische Projection der Ebene auf eine Kugel und mit Berücksichtigung der im vorigen Kapitel auseinandergesetzten Lehrsätze der projectiven Geometrie des Raumes. Hier wollen wir nur zwei Sätze aufstellen, welche sich auf diese Weise unmittelbar ergeben:

1) *Die homogene Gleichung ersten Grades zwischen den tetracyclischen Coordinaten stellt einen Kreis (bezw. eine Gerade) dar; und umgekehrt kann jeder Kreis (bezw. jede Gerade) auf diese Weise dargestellt werden.*

2) *Jeder Kreisverwandtschaft entspricht eine homogene lineare Substitution der tetracyclischen Coordinaten, welche die Identität $\Omega = 0$ ungeändert lässt; und umgekehrt.*

Durch diese zwei Sätze sehen wir, dass die Geometrie der reciproken Radien der Ebene wirklich ihren adäquaten analytischen Ausdruck in der Verwendung tetracyclischer Coordinaten findet.

An die obenstehenden zwei Sätze knüpfen wir noch einige Bemerkungen an.

Wie im Satze 1) gesagt wird, stellt jede homogene Gleichung ersten Grades in den tetracyclischen Coordinaten einen Kreis dar. Derselbe kann im speciellen Falle ein Punktkreis sein. Ein solcher Kreis wird gerade wie in anderen geometrischen Disciplinen auch hier imaginäre Punkte besitzen, und in zwei Theile zerlegbar sein, welche die stereographischen Projectionen von zwei geradlinigen Erzeugenden der Kugel sind *). Trotzdem werden wir im Folgenden oft der Kürze halber so sprechen, als wenn der Doppelpunkt allein vorhanden wäre. Man sieht auch wieder, indem man die stereographische Projection auf die Kugel zu Hülfe nimmt, dass, wenn man die tetracyclischen Coordinaten dieses Doppelpunktes kennt, man sofort die Gleichung des

*) Die Projection einer Erzeugenden der Kugel, welche für die Auffassungsweise der projectiven Geometrie eine Gerade durch einen der Kreispunkte ist, heisst nach Lie eine *Minimalgerade.* Diese Minimalgeraden spielen in der Geometrie der reciproken Radien eine eigenthümliche Rolle, indem sie als Curven einer niederen Stufe wie Kreise oder gewöhnliche Geraden erscheinen. In der That kann jede Minimalgerade durch zwei Gleichungen ersten Grades in den tetracyclischen Coordinaten dargestellt werden, welche zusammen die Identität überflüssig machen. Sie gehen durch Kreisverwandtschaft immer wieder in Minimalgeraden über. Durch jeden Punkt gehen zwei Minimalgeraden; insbesondere auch durch den unendlich fernen Punkt. Dieser letzte Paar von Minimalgeraden spielt in der Geometrie der reciproken Radien eine ähnliche Rolle wie die Kreispunkte der projectiven Geometrie.

Im Texte werden uns immer nur Paare von Minimalgeraden begegnen, welche zusammen als Punktkreise bezeichnet werden dürfen.

Punktkreises hinschreiben kann, indem man die Identität $\Omega = 0$ in Bezug auf diesen Punkt polarisirt.

Ueber den oben angeführten Satz*2) ist zu bemerken, dass während lineare Substitutionen der tetracyclischen Coordinaten, welche die Identität $\Omega = 0$ ungeändert lassen, als Kreisverwandtschaften interpretirt werden können, *jede* lineare Substitution derselben als Coordinatentransformation von einem System tetracyclischer Coordinaten zu einem anderen gedeutet werden kann.

§ 5. Ueber gewisse wichtige Specialsysteme tetracyclischer Coordinaten.

Es ist oft wünschenswerth, durch geeignete Wahl des Coordinatensystems die Identität $\Omega = 0$, welche zwischen den tetracyclischen Coordinaten besteht, auf eine einfache Gestalt zu bringen. Um am einfachsten zu sehen, wie dies erreicht werden kann, greifen wir wieder zur stereographischen Projection auf die Kugel zurück. Dann ist die Frage einfach die: Wie soll man das Coordinatentetraeder wählen, damit die Kugelgleichung eine einfache Gestalt annimmt? Im vorigen Kapitel (Seite 12) haben wir schon drei verschiedene Antworten auf diese Frage kennen gelernt. Durch eine leichte geometrische Ueberlegung können wir dann zu der Ebene zurückgehen, wodurch wir folgende Sätze bekommen:

Nimmt man die vier Grundkreise eines tetracyclischen Coordinatensystems so an, dass sie sich sämmtlich einander orthogonal schneiden, so lautet die Identität:

$$(A) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Nimmt man das Coordinatensystem so an, dass die zwei Grundkreise x_3 und x_4 einander orthogonal schneiden, während die Grundkreise x_1 und x_2 Punktkreise sind, welche in den Schnittpunkten von x_3 und x_4 liegen, so lautet die Identität:

$$(B) \qquad A_1 x_1 x_2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Nimmt man sämmtliche Grundkreise als Punktkreise an und zwar in der Weise, dass x_3 und x_4 in den Schnittpunkten von x_1 und x_2 liegen, so lautet die Identität:

$$(C) \qquad A_1 x_1 x_2 + A_3 x_3 x_4 = 0.$$

Diese drei kanonischen Formen der Identität pflegt man dann noch dadurch zu vereinfachen, dass man die a gleich 1, die A gleich 2 setzt. Dies hat natürlich auf die Grundkreise keinen Einfluss, son-

dern wird dadurch erreicht, dass man die tetracyclischen Coordinaten als mit anderen Vielfachen der Potenzen in Bezug auf diese Kreise proportional definirt *).

Nun wollen wir aber noch insbesondere auf *Realitätsfragen* bei diesen Coordinatensystemen eingehen. Ehe wir aber hiermit anfangen, schicken wir einige Worte über Realitätsverhältnisse im Allgemeinen voraus.

Jede Curve, deren Gleichung in Cartesischen Coordinaten mit lauter reellen Coefficienten geschrieben werden kann, wollen wir eine *reelle Curve* nennen. Es braucht aber keineswegs jede reelle Curve reelle Punkte zu besitzen, wie man schon am Beispiele eines Kreises mit reellem Mittelpunkt und rein imaginärem Radius sieht. Eine solche reelle Curve bezeichnen wir (K) als *nulltheilig*, während wir Curven als ein-, zwei- etc. -theilig bezeichnen, wenn sie aus ein, zwei etc. verschiedenen Zügen bestehen; solche Curven sind natürlich nothwendig reell. Als Uebergangsfälle zwischen diesen Curvenkategorien kann man dann Curven mit Doppelpunkten ansehen. So steht z. B. der reelle Punktkreis zwischen dem eintheiligen und dem nulltheiligen reellen Kreise.

Indem wir jetzt zu dem oben angeführten System tetracyclischer Coordinaten zurückkehren, bemerken wir zunächst, dass wir uns nur mit solchen Coordinatensystemen beschäftigen wollen, bei welchen die tetracyclischen Coordinaten eines reellen Punktes reellen Grössen proportional oder, sofern dies nicht der Fall ist, paarweise conjugirt imaginäre Grössen sind. Inwiefern können unter diesen Beschränkungen die obigen kanonischen Coordinatensysteme vorkommen? Um diese Frage beantworten zu können, erinnern wie uns an das von Sylvester sog. *Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.* Dasselbe lautet bekanntlich **) folgendermassen:

Wenn eine quadratische Form von n Veränderlichen mit reellen Coefficienten und von nicht verschwindender Discriminante durch irgendwelche lineare Substitution mit lauter reellen Coefficienten in ein Aggregat von n Quadraten verwandelt wird (was auf unendlich viele Weisen möglich ist), so hängt der Ueberschuss der in diesem Aggregat auftretenden Vorzeichen der einen Art über diejenigen der anderen Art nur von der Natur der Form selbst ab, nicht aber von der besonderen Gestalt der linearen Substitution.

---

*) Des Näheren vergl. man für den Fall (A) den 8. Paragraphen dieses Kapitels.

**) Vergl. etwa Baltzer „Elemente der Determinanten“ S. 176.

Wenn wir nun als ein System reeller tetracyclischer Coordinaten ein solches System bezeichnen, in welchem jeder reelle Punkt reelle Coordinaten besitzt, so ist es klar, dass man von jedem reellen tetracyclischen Coordinatensystem zu jedem anderen durch eine lineare Substitution mit reellen Coefficienten übergehen kann. Nun hat man aber in den Coordinaten ξ, η, ζ, τ, welche den homogen gemachten rechtwinkligen Raumcoordinaten (Seite 21) entsprechen, ein reelles tetracyclisches Coordinatensystem mit der Identität:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2 = 0.$$

Hiernach sehen wir, dass wir sagen dürfen:

Die zwischen unseren tetracyclischen Coordinaten bestehende Identität ist im Sinne des Trägheitsgesetzes durch drei Vorzeichen der einen und ein Vorzeichen der anderen Art charakterisirt.

Diesen Satz wenden wir jetzt auf die Normalformen A, B, C der Identität an.

Fassen wir zunächst ein Coordinatensystem mit einer Identität von der Form:

$$\text{(A)} \qquad \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 = 0$$

ins Auge. Hier haben wir folgende drei Fälle zu unterscheiden:

(A′) Jeder reelle Punkt entspricht reellen Coordinaten.

(A″) Jeder reelle Punkt entspricht reellen Werthen zweier Coordinaten, etwa von x_3 und x_4, aber conjugirt imaginären Werthen der anderen zwei Coordinaten.

(A‴) Jeder reelle Punkt entspricht Coordinaten, welche alle vier paarweise conjugirt imaginär sind; etwa x_1 mit x_2 und x_3 mit x_4.

Im Falle (A′) haben wir von vornherein ein reelles tetracyclisches Coordinatensystem vor uns; wir sehen also sofort, dass hier die Identität drei Vorzeichen der einen und eins der anderen Art haben muss.

Im Falle (A″) setzen wir:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq).$$

Wenn nun in der Identität x_1^2 und x_2^2 verschiedene Vorzeichen hätten, würde die Identität die Form annehmen:

$$2ipq \pm x_3^2 \pm x_4^2 = 0,$$

da man aber in p, q, x_3, x_4 ein System reeller tetracyclischer Coordinaten hat, so würde sich diese Identität für reelle Punkte durch Nullsetzen ihres reellen und ihres rein imaginären Bestandtheiles in zwei neue Identitäten spalten, was natürlich unmöglich ist. Es müssen

also die Vorzeichen von x_1^2 und x_2^2 in der Identität dieselben sein, so dass die Identität nach Einführung von p und q folgendermassen lautet:

$$\pm (p^2 - q^2) \pm x_3^2 \pm x_4^2 = 0.$$

Nun hat man aber, wie schon gesagt, in p, q, x_3, x_4 ein System reeller tetracyclischer Coordinaten, wir sehen also sofort, dass die Vorzeichen von x_3^2 und x_4^2 dieselben sein müssen, dass sie aber mit dem Vorzeichen von $(p^2 - q^2)$ nicht übereinzustimmen brauchen. Hiernach müssen im vorliegenden Falle in der Identität:

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 = 0$$

entweder 1) alle vier Vorzeichen dieselben sein, oder 2) jedenfalls x_1^2 und x_2^2, sowie x_3^2 und x_4^2 bezw. dasselbe Vorzeichen haben. Wir werden aber später sehen, dass diese zwei Fälle nicht wesentlich von einander verschieden sind.

Im Falle (A‴) wollen wir setzen:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r + is),$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq), \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r - is),$$

so haben wir in p, q, r, s ein System reeller tetracyclischer Coordinaten. Zunächst sehen wir, dass, damit die Identität sich nicht wegen des Vorhandenseins reeller und rein imaginärer Glieder in zwei spaltet, es nöthig ist, dass dieselbe in die eine oder andere folgender zwei Formen übergehen muss:

$$(p^2 - q^2) \pm (r^2 - s^2) = 0,$$
$$pq \pm rs = 0.$$

Dass die erste dieser Formen dem Trägheitsgesetze wiedersprechen würde, sehen wir sofort. Im zweiten Falle setzen wir:

$$p = p' + q', \quad r = r' + s',$$
$$q = p' - q', \quad s = r' - s',$$

wo natürlich p', q', r', s' wiederum ein System reeller tetracyclischer Coordinaten bilden. Jetzt nimmt die Identität die Form an:

$$(p'^2 - q'^2) \pm (r'^2 - s'^2) = 0,$$

welche wieder mit dem Trägheitsgesetze in Widerspruch steht. Es ist also dieser Fall (A‴) überhaupt unmöglich.

Auf ganz ähnliche Weise können wir die verschiedenen Möglichkeiten untersuchen, welche bei den kanonischen Formen der Identität:

(B) $$2x_1x_2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 = 0,$$
(C) $$x_1x_2 \pm x_3x_4 = 0$$

vorkommen. Der Kürze halber stellen wir nur das Resultat folgendermassen zusammen.

Bei den von uns betrachteten Realitätsverhältnissen sind nur folgende Fälle möglich:

(A′) Alle Coordinaten reeller Punkte sind reell, und die Identität lautet etwa:

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

(A″) Für reelle Punkte sind zwei Coordinaten (etwa x_3 und x_4) reell, die anderen zwei conjugirt imaginär. Die Identität lautet entweder

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

oder

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

(B′) Sämmtliche Coordinaten reeller Punkte sind reell. Die Identität lautet:

$$2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

oder

$$2x_1x_2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

(B″) Für reelle Punkte sind x_3 und x_4 reell, x_1 und x_2 aber conjugirt imaginär. Die Identität lautet etwa:

$$2x_1x_2 - x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

(B‴) Für reelle Punkte sind x_1 mit x_2, x_3 mit x_4 conjugirt imaginär. Die Identität lautet entweder:

$$2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

oder

$$2x_1x_2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

(C) Für reelle Punkte sind zwei der Coordinaten, welche in der Identität mit einander multiplicirt auftreten (also etwa x_1 und x_3) reell, die anderen zwei mit einander conjugirt imaginär. Die Identität lautet entweder:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0$$

oder

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 0.$$

Diese sechs Fälle wollen wir jetzt noch näher untersuchen.

Im Falle (A′) müssen offenbar alle vier Grundkreise reell sein. Es fragt sich aber noch, ob dieselben eintheilig oder nulltheilig sind. Aus der Identität:

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

sehen wir, dass der Kreis $x_1 = 0$ auch durch die Gleichung:

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

dargestellt werden kann. Da aber nach Voraussetzung x_2, x_3, x_4 für reelle Punkte reell sind, so kann die Summe ihrer Quadrate für reelle Punkte nicht verschwinden. Der Kreis $x_1 = 0$ ist also nulltheilig. Dagegen sind die Kreise $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ sämmtlich eintheilig, denn der Kreis $x_2 = 0$ z. B. kann durch die Gleichung:

$$-x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

dargestellt werden, und diese Gleichung wird offenbar durch unendlich viele reelle Werthe der Verhältnisse $x_1 : x_3 : x_4$ befriedigt.

Nun wissen wir aber, dass sich die Grundkreise orthogonal schneiden, und es lässt sich leicht nachrechnen, dass sich zwei eintheilige Kreise nur dann orthogonal schneiden können, wenn sie sich reell schneiden. Wir können also durch eine reelle Inversion irgend zwei der eintheiligen Grundkreise in Gerade transformiren. Damit nun die anderen zwei Kreise diese Geraden orthogonal schneiden sollen, ist es offenbar nothwendig und hinreichend, dass sie beide ihre Mittelpunkte im Schnittpunkte der zwei Geraden haben. Den dritten eintheiligen Kreis können wir dann durch reelle Aehnlichkeitstransformation in den Einheitskreis transformiren. Nun ist aber die Bedingung, dass sich zwei concentrische Kreise:

$$x^2 + y^2 + at^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + bt^2 = 0$$

orthogonal schneiden sollen, einfach $a + b = 0$. Es muss also der nulltheilige Kreis jetzt den Radius i haben. Man sieht also, dass man durch reelle Kreisverwandtschaft jedes Coordinatensystem (A′) auf folgendes transformiren kann:

$$\begin{aligned} x_1 &= x^2 + y^2 + t^2, \\ x_2 &= x^2 + y^2 - t^2, \\ x_3 &= 2xt, \\ x_4 &= 2yt. \end{aligned}$$

Durch ganz entsprechende Ueberlegungen, welche hier nicht näher angegeben zu werden brauchen, kommen wir auf folgende einfache typische Coordinatensysteme für die anderen fünf Fälle, auf welche man in jedem Falle durch reelle Kreisverwandtschaft gelangen kann. Wir schreiben auch das soeben gefundene System für den Fall (A′) wieder hin, nur mit der formalen Aenderung, dass die Coordinate x_1

für reelle Punkte rein imaginär genommen wird, damit die Identität mit lauter Pluszeichen erscheint. Eine ähnliche Umänderung haben wir auch im Falle (B″) vorgenommen.

$$\text{(A)} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

(A′)
$$x_1 = i(x^2 + y^2 + t^2),\quad x_2 = x^2 + y^2 - t^2,\quad x_3 = 2xt,\quad x_4 = 2yt.$$

(A″)
$$x_1 = \sqrt{i}(x^2 + y^2 + it^2),\quad x_2 = \sqrt{-i}(x^2 + y^2 - it^2),\quad x_3 = 2xt,\quad x_4 = 2yt,$$

$$\text{(B)} \quad 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

(B′)
$$x_1 = -2t^2,\quad x_2 = x^2 + y^2,\quad x_3 = 2xt,\quad x_4 = 2yt.$$

(B″)
$$x_1 = \sqrt{2}(x + yi)t,\quad x_2 = \sqrt{2}(x - yi)t,\quad x_3 = i(x^2 + y^2 + t^2),\quad x_4 = x^2 + y^2 - t^2.$$

(B‴)
$$x_1 = \sqrt{2}(x + yi)t,\quad x_2 = \sqrt{2}(x - yi)t,\quad x_3 = \sqrt{i}(x^2 + y^2 + it^2),\quad x_4 = \sqrt{-i}(x^2 + y^2 - it^2).$$

$$\text{(C)} \quad x_1x_2 + x_2x_4 = 0.$$

$$x_1 = -2t^2,\quad x_2 = x^2 + y^2,\quad x_3 = \sqrt{2}(x + yi)t,\quad x_4 = \sqrt{2}(x - yi)t.$$

Natürlich kann man unter Beibehaltung desselben Systems von Grundkreisen in jedem Falle die Identität mit beliebigen Coefficienten behaften, indem man die Coordinaten mit constanten Factoren multiplicirt. In der That werden wir die Identität (A) oft in der Form schreiben:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0.$$

§ 6. Ueber cyclische Curven und das aus ihnen gebildete allgemeine confocale System.

Im vierten Paragraphen dieses Kapitels sahen wir, dass die Gleichung ersten Grades zwischen tetracyclischen Coordinaten einen Kreis bezw. eine Gerade darstellt. In diesem Paragraphen wollen wir zu denjenigen Curven übergehen, welche in der Geometrie der reciproken Radien nach den Kreisen als die einfachsten anzusehen sind; d. h. zu

den Curven, welche durch eine Gleichung *zweiten* Grades zwischen tetracyclischen Coordinaten dargestellt werden*).

Diese Curven wollen wir mit dem Namen *cyclische Curven* belegen. Offenbar hat man als ersten Satz: *Cyclische Curven gehen durch Kreisverwandtschaft in cyclische Curven über.*

Was nun die Gestalt der cyclischen Curven angeht, so können wir uns darüber folgendermassen vorläufig orientiren. Wenn wir die tetracyclischen Coordinaten als Tetraedercoordinaten im Raume deuten, so stellt die Gleichung einer cyclischen Curve eine Fläche zweiter Ordnung dar. Hieraus sehen wir, dass eine cyclische Curve als Schnitt der Kugel mit einer Fläche zweiter Ordnung erscheint. Wir brauchen uns also nur über die Gestalt einer solchen Schnittcurve klar zu werden. Zunächst ist ersichtlich, dass diese Schnittcurve im Allgemeinen, sofern sie überhaupt reell ist, aus keinem, einem oder zwei reellen Ovalen besteht. Hiernach können wir sagen: *Die allgemeine reelle cyclische Curve kann nulltheilig, eintheilig oder zweitheilig sein***). Es können sich aber auch die Fläche zweiter Ordnung und die Kugel berühren, in welchem Falle die cyclische Curve einen Doppelpunkt bekommen wird, welcher entweder ein gewöhnlicher oder ein isolirter sein wird, je nach der Art der Berührung. Im speciellen Falle kann dieser Doppelpunkt auch eine Spitze sein.

Ehe wir aber diese Curven weiter discutiren, wollen wir uns fragen, um an geläufige geometrische Vorstellungen anzuknüpfen: Was sind die cyclischen Curven vom projectiven Standpunkte aus betrachtet? Um diese Frage zu beantworten, führen wir in die allgemeine Gleichung der cyclischen Curve an Stelle der tetracyclischen Coordinaten die homogen gemachten rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x, y, t ein. Dann lautet die Curvengleichung offenbar:

$$A(x^2+y^2)^2+(Bx+Cy)(x^2+y^2)t+Dx^2t^2+Exyt^2+Fy^2t^2 \\ +Gxt^3+Hyt^3+It^4=0 \text{***)}.$$

*) Gerade wie nicht Kreise, sondern Minimalgeraden die einfachsten Curven sind, so giebt es hier eine Zwischenstufe zwischen Kreisen und cyclischen Curven. Dieselbe besteht aus der stereographischen Projection der Raumcurven dritter Ordnung, welche auf der Kugel liegen, d. h. für die Auffassungsweise der projectiven Geometrie, aus den ebenen Curven dritter Ordnung, welche durch den einen Kreispunkt zweifach, durch den anderen einfach hindurchgehen. Da sämmtliche Curven dieser Art imaginär sind, bleiben sie für uns ausser Betracht.

**) Es mag beiläufig hier bemerkt werden, dass die Unterscheidung von Curvenzweigen in paare und unpaare, die in der projectiven Geometrie eine so grosse Rolle spielt, in der Geometrie der reciproken Radien keinen Platz hat.

***) Hiernach sieht man, dass die cyclische Curve von acht wesentlichen Constanten abhängt. Dies ist keineswegs damit in Widerspruch, dass die allgemeine

Hieraus sieht man sofort, dass cyclische Curven im Allgemeinen specielle Curven vierter Ordnung sind, dass sie aber (wenn $A = 0$) in specielle Curven dritter Ordnung und die unendlich ferne Gerade zerfallen können, und dass die allgemeine Curve zweiter Ordnung mit der doppelt zählenden unendlich fernen Geraden zusammen auch als specielle cyclische Curve (wo $A = B = C = 0$) anzusehen ist. Ferner sieht man auch leicht aus der obenstehenden Gleichung, wie die allgemeine Curve vierter Ordnung specialisirt werden muss, um eine cyclische Curve zu sein. Die unendlich ferne Gerade $t = 0$ schneidet nämlich diese Curve in denselben Punkten, in welchen sie den Punktkreis $x^2 + y^2 = 0$ schneidet. Entweder muss also die cyclische Curve Doppelpunkte in den Kreispunkten haben, oder sie muss die unendlich ferne Gerade in diesen Punkten berühren. Dass ersteres der Fall ist, sehen wir, wenn wir bemerken, dass auch die Geraden $x \pm \sqrt{-1}\, y = 0$ die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten treffen. Wir führen dies gleich im folgendem Satze genauer aus:

Vom Standpunkte der projectiven Geometrie aus sind cyclische Curven die allgemeinen Curven vierter Ordnung, welche die Kreispunkte als Doppelpunkte besitzen. Insbesondere können dieselben auch zerfallen in a) die unendlich ferne Gerade und eine Curve dritter Ordnung, welche einfach durch beide Kreispunkte geht; b) die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und einen beliebigen Kegelschnitt; c) zwei Kreise.

Wir wollen uns aber späterhin immer auf den Standpunkt der Geometrie der reciproken Radien stellen, und es ist vor allen Dingen wichtig zu bemerken, dass für unsere Auffassung cyclische Curven im Allgemeinen *keine* Doppelpunkte besitzen, da die Kreispunkte ja für uns überhaupt keine Existenz haben. Dann ist es aber auch interessant sich zu fragen: was für eine Specialisirung erleidet eine cyclische Curve vom Standpunkte der Geometrie der reciproken Radien aus, wenn sie von der dritten oder gar von der zweiten Ordnung wird? Um dies zu erfahren unterwerfen wir eine solche Curve einer beliebigen Inversion. Die Curve dritter Ordnung geht dadurch in eine cyclische Curve über, welche durch das Inversionscentrum hindurchgeht, sonst aber allgemein ist. Dagegen geht ein Kegelschnitt in eine cyclische Curve über, welche im Inversionscentrum einen Doppelpunkt besitzt. Je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hy-

---

homogene Gleichung zweiten Grades in x_1, x_2, x_3, x_4 *neun* wesentliche Constanten enthält, denn einer von diesen Constanten können wir noch vermittelst der Identität einen beliebigen Werth beilegen.

perbel ist, wird dieser Doppelpunkt offenbar ein isolirter Doppelpunkt, eine Spitze oder ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Indem wir ferner bemerken, dass das Inversionscentrum aus dem unendlich fernen Punkte durch Inversion hervorgeht, sehen wir, dass wir durch folgende kleine Tabelle die zwei Auffassungsweisen vergleichen können:

Geometrie der reciproken Radien.	*Projective Geometrie.*
Allgemeine cyclische Curve (ohne Singularität).	Curve vierter Ordnung mit den Kreispunkten als Doppelpunkte.
Cyclische Curve ohne Singularität, welche durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht.	Die unendlich ferne Gerade und eine Curve dritter Ordnung ohne Singularität, welche durch die Kreispunkte hindurchgeht.
Cyclische Curve, welche den unendlich fernen Punkt als Doppelpunkt besitzt: 1) als gewöhnlichen Doppelpunkt, 2) als isolirten Doppelpunkt, 3) als Spitze.	Die doppeltzählende unendlich ferne Gerade und ein Kegelschnitt nämlich: 1) Hyperbel, 2) Ellipse, 3) Parabel.
Zwei Kreise.	Zwei Kreise.

Um nun etwas Näheres über cyclische Curven zu erfahren, müssen wir durch geeignete Wahl des Coordinatensystems versuchen, die Gleichung der Curve auf eine möglichst einfache Gestalt zu bringen. Hier kommt uns wieder die projective Geometrie des Raumes zu Hülfe. Die Gleichung $\Phi = 0$ der cyclischen Curve stellt nämlich, wie schon bemerkt, eine Fläche zweiter Ordnung dar, während die Identität $\Omega = 0$ die Kugel darstellt. Nun wissen wir aber (vergl. Kap. 1, § 3), dass im Allgemeinen zwei Flächen zweiter Ordnung ein und nur ein gemeinsames Polartetraeder besitzen. Durch Wahl dieses Polartetraeders als Coordinatentetraeder können wir also die Kugelgleichung auf die Gestalt:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

bringen, und die Gleichung der anderen Fläche zweiter Ordnung auf die Gestalt:

$$\lambda_1 a_1 x_1^2 + \lambda_2 a_2 x_2^2 + \lambda_3 a_3 x_3^2 + \lambda_4 a_4 x_4^2 = 0.$$

Hier führt offenbar die Inversion:

$$\varrho x_1' = -x_1, \quad \varrho x_2' = x_2, \quad \varrho x_3' = x_3, \quad \varrho x_4' = x_4$$

die cyclische Curve in sich selbst über, und dasselbe gilt auch von der Inversion in Bezug auf die anderen drei Grundkreise. Wir werden also diese vier Kreise als Symmetriekreise der cyclischen Curve bezeichnen, und können folgenden Satz aussprechen:

Die allgemeine cyclische Curve besitzt vier und nur vier Symmetriekreise, welche einander orthogonal schneiden. Wenn man diese vier Kreise als Grundkreise eines tetracyclischen Coordinatensystems mit der Identität:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

wählt, so lautet die Gleichung der Curve:

$$\lambda_1 a_1 x_1^2 + \lambda_2 a_2 x_2^2 + \lambda_3 a_3 x_3^2 + \lambda_4 a_4 x_4^2 = 0.$$

Im Folgenden werden wir nun mit Orthogonalsystemen zu thun haben, welche aus cyclischen Curven gebildet sind. Um ein solches Orthogonalsystem aufzustellen, projiciren wir wieder die Ebene stereographisch auf die Kugel und fassen das System confocaler sphärischer Kegelschnitte ins Auge, welches durch die Kegelschaar:

$$\frac{\xi^2}{\lambda - a} + \frac{\eta^2}{\lambda - b} + \frac{\zeta^2}{\lambda - c} = 0$$

auf der Kugel: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2 = 0$ ausgeschnitten wird. Diese sphärischen Kegelschnitte, auf die Ebene stereographisch projicirt, liefern natürlich ein System orthogonaler cyclischer Curven, welche sämmtlich die vier Kreise $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\tau = 0$ als Symmetriekreise besitzen. Nun treten aber diese vier Kreise selber jedesmal doppeltzählend als Curven der Schaar auf, indem wir der Reihe nach dem Parameter λ die Werthe a, b, c, ∞ beilegen. Damit nun nicht gerade der Werth $\lambda = \infty$ auf diese Weise als ausgezeichnet erscheint, wollen wir in die Gleichung der Kegelschaar statt des Parameters λ einen neuen Parameter λ' einführen vermittelst der Gleichung:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}.$$

Bezeichnen wir nun durch e_1, e_2, e_3, e_4 die Werthe von λ', welche den Werthen a, b, c, ∞ von λ entsprechen, so haben wir die Gleichungen:

$$a = \frac{\alpha e_1 + \beta}{\gamma e_1 + \delta}, \quad b = \frac{\alpha e_2 + \beta}{\gamma e_2 + \delta}, \quad c = \frac{\alpha e_3 + \beta}{\gamma e_3 + \delta},$$

$$\gamma e_4 + \delta = 0.$$

Die Gleichung der confocalen Kegel nimmt also die Gestalt an:

$$\xi^2 \cdot \frac{(\gamma\lambda' + \delta)(\gamma e_1 + \delta)}{(\lambda' - e_1)(\alpha\delta - \beta\gamma)} + \eta^2 \cdot \frac{(\gamma\lambda' + \delta)(\gamma e_2 + \delta)}{(\lambda' - e_2)(\alpha\delta - \beta\gamma)} + \zeta^2 \cdot \frac{(\gamma\lambda' + \delta)(\gamma e_3 + \delta)}{(\lambda' - e_3)(\alpha\delta - \beta\gamma)} = 0.$$

Wenn wir hier bemerken, dass $\delta = -\gamma e_4$, und dann durch den Factor:

$$\frac{\gamma(\gamma\lambda' + \delta)}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

herausdividiren, so nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\xi^2\left(\frac{e_1 - e_4}{\lambda' - e_1}\right) + \eta^2\left(\frac{e_2 - e_4}{\lambda' - e_2}\right) + \zeta^2\left(\frac{e_3 - e_4}{\lambda' - e_3}\right) = 0$$

oder auch, indem wir den Strich am λ weglassen:

$$\xi^2\left(\frac{1}{\lambda - e_1} - \frac{1}{\lambda - e_4}\right) + \eta^2\left(\frac{1}{\lambda - e_2} - \frac{1}{\lambda - e_4}\right) + \zeta^2\left(\frac{1}{\lambda - e_3} - \frac{1}{\lambda - e_4}\right) = 0.$$

Bis jetzt sind dies noch immer dieselben confocalen Kegel wie zuerst. Jetzt aber bekommen wir hieraus ein allgemeineres Orthogonalsystem sphärischer Curven, indem wir den Raum einer Collineation unterwerfen, welche die Kugel in sich transformirt. Wählen wir dann als neues Coordinatentetraeder das transformirte des alten (welches, wie wir wissen, aus drei einander orthogonal schneidenden Ebenen und der unendlich fernen Ebene bestand), so können wir die Tetraedercoordinaten so einführen, dass die Kugelgleichung lautet:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0,$$

und die Gleichung der Kegelschaar (worin die Spitzen der Kegel nicht mehr im Mittelpunkte der Kugel liegen, und die Kegel nicht mehr confocal sind):

$$a_1x_1^2\left(\frac{1}{\lambda - e_1} - \frac{1}{\lambda - e_4}\right) + a_2x_2^2\left(\frac{1}{\lambda - e_2} - \frac{1}{\lambda - e_4}\right) +$$
$$+ a_3x_3^2\left(\frac{1}{\lambda - e_3} - \frac{1}{\lambda - e_4}\right) = 0,$$

oder:

$$\frac{a_1x_1^2}{\lambda - e_1} + \frac{a_2x_2^2}{\lambda - e_2} + \frac{a_3x_3^2}{\lambda - e_3} - \frac{a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2}{\lambda - e_4} = 0.$$

Nun bekommen wir aber offenbar dieselben sphärischen Curven, obwohl nicht dieselben schneidenden Flächen, wenn wir in dieser Gleichung den Ausdruck: $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$ durch $-a_4x_4^2$ ersetzen. Wir kommen hierdurch auf folgenden Satz:

Die Gleichung:

$$\sum_1^4{}_i \frac{a_ix_i^2}{\lambda - e_i} = 0$$

zwischen tetracyclischen Coordinaten mit der Identität:

$$\sum_1^4 {}_i\, a_i x_i^2 = 0$$

stellt das allgemeine orthogonale System confocaler cyclischer Curven dar *).

§ 7. Uebertragung unserer bisherigen Resultate auf den Raum.

Kehren wir jetzt zur Geometrie der reciproken Radien im Raume zurück. Um hier gerade so zu verfahren, wie wir es in der Ebene gethan haben, müssten wir den Raum von drei Dimensionen auf eine „Kugel" im Raume von vier Dimensionen stereographisch beziehen. Da wir aber hier nicht auf die Auseinandersetzungen eingehen wollen, welche als Einleitung in die Geometrie des Raumes von vier Dimensionen nöthig wären, so ziehen wir es vor, gleich die folgende Definition der auf dem genannten Wege zu findenden *pentasphärischen* Coordinaten an die Spitze zu stellen:

Die pentasphärischen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 eines Raumpunktes sind proportional beliebig zu wählenden Vielfachen der Potenzen des betreffenden Punktes in Bezug auf fünf Grundkugeln **).

Diese Coordinaten haben dann, wie leicht nachzuweisen ist, folgende Eigenschaften:

Zwischen den fünf pentasphärischen Coordinaten eines Punktes besteht eine homogene quadratische Identität von nicht verschwindender Discriminante $\Omega = 0$.

Falls man es mit einem reellen System pentasphärischer Coordinaten zu thun hat, ist die Form Ω im Sinne des Trägheitsgesetzes durch vier Vorzeichen der einen und ein Vorzeichen der anderen Art charakterisirt.

Die homogene Gleichung ersten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten stellt eine Kugel bezw. Ebene dar.

Im speciellen Falle kann diese Kugel auch eine Punktkugel sein, und wir können gerade wie in der Ebene sagen:

Die Gleichung einer Punktkugel findet man durch Polarisation der Identität in Bezug auf den Doppelpunkt der Kugel.

Ferner sagen wir:

---

*) Dass diese Curven wirklich confocal sind, sieht man am leichtesten durch Betrachtung der imaginären geradlinigen Erzeugenden der Kugel.

Dieses Orthogonalsystem wurde schon 1860 (Crelle, Bd. 57) von Siebeck behandelt, allerdings nur in dem speciellen Falle, wo zwei der Symmetriekreise des Systems gerade Linien sind.

**) Diese fünf Grundkugeln können beliebig gewählt werden, nur dürfen sie nicht sämmtlich auf einer sechsten Kugel senkrecht stehen.

Die Kreisverwandtschaften des Raumes werden durch diejenigen homogenen linearen Substitutionen der pentasphärischen Coordinaten geliefert, welche die Identität $\Omega = 0$ ungeändert lassen.

Jede homogene lineare Substitution der pentaphärischen Coordinaten kann als Coordinatentransformation gedeutet werden.

Nimmt man die Grundkugeln eines pentasphärischen Coordinatensystems so an, dass sie einander sämmtlich orthogonal schneiden, so lautet die Identität:

$$\sum_1^5 {}_i\, a_i x_i^2 = 0.$$

Sind die drei Grundkugeln x_3, x_4, x_5 einander orthogonal, die anderen zwei aber Punktkugeln, welche in den zwei Schnittpunkten dieser drei Kugeln liegen, so lautet die Identität:

$$A_1 x_1 x_2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2 = 0.$$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 alle Punktkugeln, welche auf der Kugel x_5 liegen derart, dass x_3 und x_4 auf dem Schnitt von x_1 und x_2 liegen (was natürlich nur im Imaginären eintreten kann), so hat die Identität die Form:

$$A_1 x_1 x_2 + A_3 x_3 x_4 + a_5 x_5^2 = 0.$$

Gehen wir jetzt zu den Realitätsverhältnissen über, welche bei pentasphärischen Coordinatensystemen, welche eine der soeben erwähnten kanonischen Identitäten besitzen, auftreten können. Durch ganz entsprechende Ueberlegungen, wie wir sie für die Ebene im § 5 gemacht haben, sehen wir, dass, sofern wir nur solche Coordinatensysteme in Betracht ziehen, in welchen die Coordinaten reeller Punkte, sofern sie nicht sämmtlich reell sind, einander paarweise conjugirt imaginär sind, es nur sechs wesentlich verschiedene Fälle giebt. Als einfachste Coordinatensysteme in diesen sechs Fällen stellen wir folgende auf, mit welchen dann alle anderen in Betracht kommenden Coordinatensysteme reell kreisverwandt sind. Wir haben aber wiederum in den Fällen (A′) und (B″) eine der Coordinaten rein imaginär angenommen, um der Identität eine für uns späterhin bequemere Gestalt zu ertheilen:

$$\text{(A)} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

(A′)	(A″)
$x_1 = i(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$,	$x_1 = \sqrt{i}(x^2 + y^2 + z^2 + it^2)$,
$x_2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$,	$x_2 = \sqrt{-i}(x^2 + y^2 + z^2 - it^2)$,
$x_3 = 2xt$,	$x_3 = 2xt$,
$x_4 = 2yt$,	$x_4 = 2yt$,
$x_5 = 2zt$.	$x_5 = 2zt$.

$$\text{(B)}\quad 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

(B′)	(B″)	(B‴)
$x_1 = -2t^2,$	$x_1 = \sqrt{2}(x+yi)t,$	$x_1 = \sqrt{2}(x+yi)t,$
$x_2 = x^2+y^2+z^2,$	$x_2 = \sqrt{2}(x-yi)t,$	$x_2 = \sqrt{2}(x-yi)t,$
$x_3 = 2xt,$	$x_3 = i(x^2+y^2+z^2+t^2),$	$x_3 = \sqrt{i}\,(x^2+y^2+z^2+it^2),$
$x_4 = 2yt,$	$x_4 = x^2+y^2+z^2-t^2,$	$x_4 = \sqrt{-i}(x^2+y^2+z^2-it^2),$
$x_5 = 2zt.$	$x_5 = 2zt,$	$x_5 = 2zt.$

$$\text{(C)}\quad 2x_1x_2 + 2x_3x_4 + x_5^2 = 0.$$

$$x_1 = -2t^2,$$
$$x_2 = x^2+y^2+z^2,$$
$$x_3 = \sqrt{2}(x+yi)t,$$
$$x_4 = \sqrt{2}(x-yi)t,$$
$$x_5 = 2zt.$$

Jetzt wollen wir noch folgendermassen definiren:

Cycliden sind alle Flächen, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten dargestellt werden.

Offenbar können wir auch sagen:

Cycliden gehen durch Kreisverwandtschaft in Cycliden über.

Was nun diese Flächen für die projective Auffassung sind, sehen wir durch ähnliche Ueberlegungen, wie wir sie im § 6 für cyclische Curven in der Ebene gemacht haben. Wir brauchen nur das Resultat in folgender tabellarischer Form zusammenzustellen:

Geometrie der reciproken Radien.	*Projective Geometrie.*
Allgemeine Cyclide (ohne Singularität).	Fläche vierter Ordnung, welche den Kugelkreis als Doppelcurve besitzt.
Cyclide ohne Singularität, welche durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht.	Die unendlich ferne Ebene und eine Fläche dritter Ordnung ohne Singularität, welche den Kugelkreis enthält.
Cyclide, welche den unendlich fernen Punkt als Doppelpunkt besitzt.	Die doppeltzählende unendlich ferne Ebene und eine Fläche zweiter Ordnung *).
Zwei Kugeln.	Zwei Kugeln.

*) Auf die besonderen Singularitäten, welche die verschiedenen Flächen zweiter Ordnung, wie Paraboloide, Rotationsflächen, Cylinder etc. für die Auffassungsweise der Geometrie der reciproken Radien besitzen, gehen wir an dieser Stelle nicht ein. Vergl. indess Kapitel 4 dieses Abschnitts.

Schliesslich stellen wir noch folgende zwei Sätze über allgemeine Cycliden und das aus ihnen gebildete allgemeine Orthogonalsystem auf:

Die allgemeine Cyclide besitzt fünf und nur fünf Symmetriekugeln, welche einander orthogonal schneiden. Wenn wir diese Kugeln als Grundkugeln eines Systems pentasphärischer Coordinaten mit der Identität

$$\sum_1^5 {}_i\, a_i x_i^2 = 0$$

wählen, so lautet die Gleichung der Cyclide:

$$\sum_1^5 {}_i\, a_i \lambda_i x_i^2 = 0.$$

Die Gleichung:

$$\sum_1^5 {}_i\, \frac{a_i x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$$

zwischen pentasphärischen Coordinaten mit der Identität

$$\sum_1^5 {}_i\, a_i x_i^2 = 0,$$

stellt das allgemeine dreifach orthogonale System confocaler Cycliden dar.

§ 8. Uebergang von der Geometrie der reciproken Radien zur elementaren Geometrie *).

Bis jetzt haben wir uns nur mit solchen Fragestellungen beschäftigt, welche in der Geometrie der reciproken Radien unmittelbar einen Platz finden. In der mathematischen Physik braucht man aber neben diesen geometrischen Eigenschaften und Formeln, welche bei Kreisverwandtschaft invariant bleiben und also ihren natürlichsten analytischen Ausdruck im Systeme pentasphärischer Coordinaten finden, auch andere Vorstellungen, welche sich auf Bogenlängen etc. beziehen und welche also eigentlich in das Gebiet der elementaren Geometrie gehören. Unter Umständen wird auch hier der Gebrauch von penta-

*) Gerade wie man die metrischen Eigenschaften von Figuren als Beziehungen zum Kugelkreise in die projective Geometrie einordnen kann, so kann man sie auch, wie wir in diesem Paragraphen sehen werden, als Beziehungen zum unendlich fernen Punkte in die Geometrie der reciproken Radien einordnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass Winkelmessungen von vornherein in der Geometrie der reciproken Radien ihren Platz haben.

Wegen der Entwickelungen dieses Paragraphen vergl. man insbesondere Darboux: Théorie générale des Surfaces Bd. I, pp. 213—219.

sphärischen Coordinaten von Vortheil sein, und wir wollen uns in diesem Paragraphen mit der Anwendung dieses Coordinatensystems auf solche Fragen beschäftigen. Dabei wollen wir uns ferner, weil es für unsere späteren Zwecke ausreicht, auf *orthogonale* pentasphärische Coordinatensysteme*) beschränken und zwar auf solche mit der Identität $\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 0$.

In diesem Falle wissen wir, dass, irgend welche fünf einander orthogonal schneidende Kugeln als Grundkugeln des Coordinatensystems genommen werden können, und dass dann die Coordinaten x_i proportional *gewissen Vielfachen* der Potenzen S_i des betreffenden Punktes in Bezug auf die fünf Grundkugeln sind; dass also:

$$x_i = t^2 C_i S_i \text{**)}.$$

Wir haben uns aber bis jetzt damit begnügt, dass es immer möglich ist, die Constanten C_i so zu bestimmen, dass die Identität die obenstehende Gestalt annimmt. Jetzt müssen wir zusehen, wie dies wirklich gemacht wird.

Zu diesem Zwecke gehen wir von dem speciellen pentasphärischen Coordinatensystem (A′) von Seite 41 aus, nämlich:

$$\begin{aligned} x_1' &= \sqrt{-1}\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2), \qquad & x_3' &= 2xt, \\ x_2' &= x^2 + y^2 + z^2 - t^2, & x_4' &= 2yt, \\ & & x_5' &= 2zt, \end{aligned}$$

wo die C_i ersichtlich bereits auf die gewollte Weise bestimmt sind.

Von diesem Systeme aus können wir zu einem beliebigen anderen orthogonalen pentasphärischen Coordinatensystem mit der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ gelangen durch die Coordinatentransformation:

$$x_i = \alpha_i x_1' + \beta_i x_2' + \gamma_i x_3' + \delta_i x_4' + \varepsilon_i x_5',$$

wo die $\alpha_i, \cdots \varepsilon_i$ den Bedingungen unterworfen werden müssen, dass:

$$\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = \sum_1^5{}_i\, x_i'^2 \text{***)}.$$

---

*) So wollen wir, der Kürze halber, pentasphärische Coordinatensysteme nennen, wo die Grundkugeln einander sämmtlich orthogonal schneiden.

**) Wir bezeichnen den Proportionalitätsfactor hier mit t^2. Wir dürfen dann natürlich nachher t als die vierte der homogen gemachten Cartesischen Coordinaten interpretiren.

***) Es würde offenbar genügen, wenn wir verlangten: $\Sigma x_i'^2 = C \Sigma x_i^2$, wo C eine beliebige Constante bedeutet. Wegen der Unbestimmtheit der x ist aber die Annahme des Textes keine wesentliche Specialisirung.

Wir haben es also mit einer orthogonalen Substitution der x zu thun.

Nun ist die Frage, welche wir beantworten wollen, die: Welchen Vielfachen der Potenzen S_i in Bezug auf die Grundkugeln $x_i = 0$ sind die Coordinaten x_i proportional? Die Antwort hierauf können wir ohne Weiteres vermöge der Substitutionscoefficienten $\alpha_i, \cdots \varepsilon_i$ gewinnen. Zu dem Zwecke drücken wir die x_i durch die Coordinaten x, y, z, t aus mittelst der Formeln für die x_i'. Dann finden wir als Coefficienten von $\frac{x^2+y^2+z^2}{t^2}$ einfach $t^2(\sqrt{-1}\cdot\alpha_i + \beta_i)$. Wir haben also:

$$x_i = t^2(\sqrt{-1}\cdot\alpha_i + \beta_i)S_i.$$

Hier lassen sich nun die Ausdrücke:

$$C_i = \sqrt{-1}\cdot\alpha_i + \beta_i$$

sehr einfach mittelst der Radien R_i der Grundkugeln ausdrücken. In der That haben wir unmittelbar:

$$R_i^2 = \frac{\gamma_i^2+\delta_i^2+\varepsilon_i^2}{(\sqrt{-1}\cdot i\alpha_i+\beta_i)^2} - \frac{\sqrt{-1}\cdot\alpha_i-\beta_i}{\sqrt{-1}\cdot\alpha_i+\beta_i} = \frac{\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2+\delta_i^2+\varepsilon_i^2}{(\sqrt{-1}\cdot\alpha_i+\beta_i)^2}.$$

Nun haben wir aber bei orthogonalen Substitutionen die Relation:

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2+\delta_i^2+\varepsilon_i^2 = 1.$$

Es ist also:

$$C_i = \sqrt{-1}\cdot\alpha_i + \beta_i = \frac{1}{R_i};$$

ein Resultat, welches wir folgendermassen in Worten zusammenfassen:

Wenn die Identität eines orthogonalen pentasphärischen Coordinatensystems die Gestalt haben soll: $\sum_1^5 {}_i\, x_i^2 = 0$, *so muss jede Coordinate* x_i *eines Punktes proportional genommen sein der Potenz dieses Punktes in Bezug auf die betreffende Grundkugel, dividirt durch den Radius dieser Kugel.*

Insbesondere wenn eine der Grundkugeln zu einer Ebene wird, wird die entsprechende Coordinate der doppelten Entfernung von dieser Ebene proportional sein.

Jetzt wollen wir die Coordinaten des unendlich fernen Punktes berechnen, denn wir gehen durch die Auszeichnung dieses Punktes thatsächlich von der Geometrie der reciproken Radien zur elementaren Geometrie über. Fassen wir zunächst das specielle Coordinatensystem

(A') von Seite 41 wieder ins Auge. Die Gleichung der unendlich fernen Punktkugel ist darin offenbar:

$$\sqrt{-1}\cdot x_1' + x_2' = 0.$$

Um nun zu dem allgemeinen Coordinatensystem mit der Identität $\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 0$ überzugehen, müssen wir die Substitution machen:

$$x_1' = \sum_1^5{}_i\, \alpha_i x_i, \quad \cdots \quad x_5' = \sum_1^5{}_i\, \varepsilon_i x_i.$$

Wir bekommen also als Gleichung der unendlich fernen Punktkugel in unseren neuen Coordinaten:

$$\sum_1^5{}_i (\sqrt{-1}\cdot\alpha_i + \beta_i) x_i = 0,$$

oder, nach dem was wir soeben bewiesen haben:

$$\sum_1^5{}_i \frac{x_i}{R_i} = 0.$$

Da ferner (vergl. Seite 40) diese Gleichung die Polare der Identität $\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 0$ in Bezug auf den unendlich fernen Punkt sein muss, so müssen die Coordinaten dieses Punktes einfach den $\frac{1}{R_i}$ proportional sein.

Wenn die Identität die Form hat $\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 0$, *sind die Coordinaten des unendlich fernen Punktes proportional den reciproken Werthen der Radien der Grundkugeln.*

Jetzt sind wir im Stande *den Abstand* zweier Punkte mittelst ihrer pentasphärischen Coordinaten auszudrücken (immer vorausgesetzt, dass die Identität die Form hat $\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 0$). Zu diesem Zwecke greifen wir wieder zu dem einfachen schon öfters gebrauchten Coordinatensystem (A') von Seite 41, welches überhaupt den leichtesten Uebergang von Cartesischen zu pentasphärischen Coordinaten liefert. Seien die Coordinaten der zwei Punkte x, y, z, t und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$, bezw. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$. Das Quadrat der Entfernung dieser Punkte ist dann:

$$D^2 = \left(\frac{x}{t} - \frac{\bar{x}}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{y}{t} - \frac{\bar{y}}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{z}{t} - \frac{\bar{z}}{\bar{t}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_3'}{2t^2} - \frac{\bar{x}_3'}{2\bar{t}^2}\right)^2 + \left(\frac{x_4'}{2t^2} - \frac{\bar{x}_4'}{2\bar{t}^2}\right)^2 + \left(\frac{x_5'}{2t^2} - \frac{\bar{x}_5'}{2\bar{t}^2}\right).$$

Wenn wir in dieser Formel $2t$ und $2\bar{t}$ durch $-x_2' - \sqrt{-1} \cdot x_1'$ und $-\bar{x}_2' - \sqrt{-1} \cdot \bar{x}_1'$ ersetzen, so haben wir einen Ausdruck der gewünschten Art. Damit die fünf Coordinaten eines jeden Punktes als möglichst gleichberechtigt erscheinen, machen wir jetzt noch folgende formale Umänderung mittelst der Identität $\sum_1^5 {}^i\, x_i'^2 = 0$:

$$D^2 = \frac{x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2}{4t^4} + \frac{\bar{x}_3'^2 + \bar{x}_4'^2 + \bar{x}_5'^2}{4\bar{t}^4} - \frac{2x_3'\bar{x}_3' + 2x_4'\bar{x}_4' + 2x_5'\bar{x}_5'}{4t^2\bar{t}^2},$$

$$= \frac{-(x_1'^2 + x_2'^2)}{(\sqrt{-1} \cdot x_1' + x_2')^2} - \frac{(\bar{x}_1'^2 + \bar{x}_2'^2)}{(\sqrt{-1} \cdot \bar{x}_1' + \bar{x}_2')^2} - \frac{2x_3'\bar{x}_3' + 2x_4'\bar{x}_4' + 2x_5'\bar{x}_5'}{4t^2\bar{t}^2},$$

$$= \frac{-2x_1'\bar{x}_1' - 2x_2'\bar{x}_2' - 2x_3'\bar{x}_3' - 2x_4'\bar{x}_4' - 2x_5'\bar{x}_5'}{(\sqrt{-1} \cdot x_1' + x_2')(\sqrt{-1} \cdot \bar{x}_1' + \bar{x}_2')},$$

$$= \frac{(x_1' - \bar{x}_1')^2 + (x_2' - \bar{x}_2')^2 + (x_3' - \bar{x}_3')^2 + (x_4' - \bar{x}_4')^2 + (x_5' - \bar{x}_5')^2}{(\sqrt{-1} \cdot x_1' + x_2')(\sqrt{-1} \cdot \bar{x}_1' + \bar{x}_2')}.$$

Indem wir nun zu dem allgemeinen System orthogonaler pentasphärischer Coordinaten mit der Identität $\sum_1^5 {}^i\, x_i = 0$ übergehen, werden nicht nur die x_i' und $\bar{x}_i'$, sondern auch die Grössen $x_i' - \bar{x}_i'$ orthogonale Substitutionen erleiden. Der Zähler unseres Ausdruckes für D^2 wird also seine Form nicht ändern. Dagegen besteht der Nenner aus dem Producte der linken Seiten der Gleichung der unendlich fernen Punktkugel einmal in den x_i', das andere Mal in den $\bar{x}_i'$ geschrieben. Wie er sich transformirt, geht also aus den Entwickelungen der letzten Seiten hervor. *Wir bekommen hiernach für das allgemeine Coordinatensystem mit der Identität* $\sum_1^5 {}^i\, x_i^2 = 0$ *die Formel:*

$$D^2 = \frac{\sum_1^5 {}^i\, (x_i - \bar{x}_i)^2}{\left(\sum_1^5 {}^i\, \frac{x_i}{R_i}\right)\left(\sum_1^5 {}^i\, \frac{\bar{x}_i}{R_i}\right)}.$$

Als wichtiger Specialfall hiervon möge noch folgender Ausdruck für das Bogenelement ds erwähnt werden:

$$ds^2 = \frac{\sum_1^5 {}_i\, dx_i^2}{\left(\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}\right)^2}.$$

Kapitel 3.

Ueber die Anwendung der Weierstrassischen Theorie der Elementartheiler auf confocale Cyclidenschaaren.

§ 1. Auseinandersetzung der Elementartheilertheorie in ihrer Beziehung zur Theorie der Cycliden.

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit einer Methode beschäftigen, mit deren Hülfe man sämmtliche Ausartungen der allgemeinen Cycliden systematisch und erschöpfend aufzählen kann; denn gerade auf diese Ausartungen werden wir im Folgenden unser Augenmerk fortwährend zu richten haben. Diese Methode finden wir in der Weierstrassischen Theorie der Elementartheiler*). Letztere Theorie hat, in der Gestalt wie wir sie gebrauchen werden, den Zweck, das volle System der Invarianten einer linearen Schaar quadratischer Formen anzugeben. Man sieht leicht, dass die Classification der Cycliden, bei Zugrundelegung der Geometrie der reciproken Radien, gerade auf das hiermit bezeichnete algebraische Problem zurückkommen muss. In der That wird eine beliebige Cyclide $\Phi = 0$ ebensowohl durch Nullsetzen irgend einer Form der linearen Schaar $\lambda\Omega - \Phi$ dargestellt (unter λ den Parameter der Schaar, unter $\Omega = 0$ die zwischen den x_i

---

*) Man vergl. den Originalaufsatz von Weierstrass: „Ueber bilineare und quadratische Formen", Berliner Monatsberichte, 1868; dann aber auch die Darstellung von Gundelfinger im dritten Supplement von Hesse's Raumgeometrie, dritte Auflage. Ferner die schon in der Einleitung genannte Inauguraldissertation von F. Klein (namentlich Abschnitt IV), Bonn 1868; wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. 23. In dieser letzten Arbeit wird die Weierstrassische Theorie nicht nur dargelegt, sondern auch in verschiedenen Punkten vervollständigt.

Obwohl sich diese Theorie mit derselben Einfachheit auf Formen mit n Variablen anwenden lässt, so wollen wir uns doch der Kürze halber auf den für uns allein in Betracht kommenden Fall $n = 5$ beschränken.

bestehende Identität verstanden). Um also zu entscheiden ob die zwei Cycliden $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$ *) kreisverwandt sind oder nicht, müssen wir zusehen ob die zwei Formenschaaren $\lambda\Omega - \Phi$ und $\lambda\Omega' - \Phi'$ durch lineare Substitutionen in einander übergeführt werden können oder nicht; oder wie man sagt, ob diese zwei Formenschaaren einander äquivalent sind oder nicht. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür liefert uns aber gerade die Weierstrassische Theorie.

Wir wollen die Formen Ω und Φ des Näheren folgendermassen schreiben:

$$\Omega = \sum_1^5{}_j \sum_1^5{}_k a_{jk} x_j x_k,$$

$$\Phi = \sum_1^5{}_j \sum_1^5{}_k b_{jk} x_j x_k,$$

und die Discriminante von $\lambda\Omega - \Phi$ in abgekürzter Form durch $| \lambda a_{jk} - b_{jk} |$ bezeichnen.

Diese Discriminante setzt Weierstrass gleich Null und bekommt hierdurch eine Gleichung fünften Grades in λ, deren fünf Wurzeln mit $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ bezeichnet werden mögen. Wir bezeichnen ferner durch λ_i' die fünf Wurzeln der Gleichung $| \lambda' a_{jk}' - b_{jk}' | = 0$, unter $| \lambda' a_{jk}' - b_{jk}' |$ die Discriminante von $\lambda'\Omega' - \Phi'$ verstanden.

Nun fragen wir uns: *Wie hängen die Wurzeln λ_i mit den Wurzeln λ_i' zusammen, wenn die Formenschaaren $\lambda\Omega - \Phi$ und $\lambda'\Omega' - \Phi'$ einander äquivalent sind?*

Bezeichnen wir zunächst durch $\overline{\Omega}$ und $\overline{\Phi}$ die zwei Formen, in welche Ω und Φ durch eine beliebige lineare Transformation übergeführt werden. Nun weiss man aber aus den Elementen der Invariantentheorie, dass die Discriminante eine Invariante ist in Bezug auf lineare Transformation, dass also **):

$$| \lambda a_{jk} - b_{jk} | \equiv \frac{1}{r^2} | \lambda \bar{a}_{jk} - \bar{b}_{jk} |,$$

unter r die Transformationsdeterminante verstanden. Es werden hiernach die Wurzeln der Gleichung:

$$| \lambda \bar{a}_{jk} - \bar{b}_{jk} | = 0$$

geradezu mit den Wurzeln λ_i übereinstimmen.

---

*) Wir denken uns natürlich Φ und Φ' nicht nothwendig mit denselben Coordinaten geschrieben.

**) Vergl. Clebsch-Lindemann: Geometrie der Ebene, S. 130.

Setzen wir nun:

$$\Omega' = \alpha\overline{\Omega} - \gamma\overline{\Phi},$$
$$\Phi' = \beta\overline{\Omega} - \delta\overline{\Phi},$$

unter α, β, γ, δ irgend welche vier Constanten verstanden, so wird die Formenschaar

$$\lambda'\Omega' - \Phi' = 0$$

offenbar mit der soeben betrachteten Formenschaar: $\lambda\overline{\Omega} - \overline{\Phi} = 0$ identisch. Die Wurzeln λ_i' sind aber natürlich nicht mehr mit den Wurzeln λ_i identisch. In der That lautet die Gleichung $\lambda'\Omega' - \Phi' = 0$, wenn man sie vermöge der Formen $\overline{\Omega}$ und $\overline{\Phi}$ ausdrückt:

$$\frac{\alpha\lambda' - \beta}{\gamma\lambda' - \delta}\overline{\Omega} - \overline{\Phi} = 0.$$

Bezeichnen wir also $\frac{\alpha\lambda' - \beta}{\gamma\lambda' - \delta}$ durch λ, so haben wir wieder dieselbe Gleichung vor uns wie soeben, deren Discriminante die Wurzeln λ_i hatte. Wir haben also die Relation:

$$\lambda_i = \frac{\alpha\lambda_i' - \beta}{\gamma\lambda_i' - \delta}.$$

Wenn zwei Formenschaaren $\lambda\Omega - \Phi$ und $\lambda'\Omega' - \Phi'$ mit einander äquivalent sein sollen, so ist jedenfalls nothwendig, dass die Wurzeln λ_i der Discriminante der einen Schaar auf die Wurzeln λ_i' der Discriminante der anderen projectiv bezogen werden können *).

Nehmen wir also den allgemeinen Fall, wo die fünf Wurzeln verschieden sind, so werden zwei diesem Falle gehörige Cycliden keineswegs immer kreisverwandt sein. Wir wollen solche Cycliden darum aber noch nicht von verschiedener *Art* nennen. Wir werden den Artbegriff vielmehr umfassender wählen und unsere erste Unterscheidung zwischen verschiedenen Arten von Cycliden darin finden, dass wir die Multiplicitäten in Betracht ziehen, mit denen verschiedene der Wurzeln λ_i zusammenfallen mögen. Hierdurch bekommen wir eine Eintheilung in sieben Classen, welche bezw. durch folgende Multiplicitäten der Wurzeln charakterisirt sind:

11111, 2111, 311, 221, 41, 32, 5.

Diese Classen sind aber noch einer weiteren Zerspaltung fähig, und hierin liegt das Wesentliche der Weierstrassischen Theorie.

*) Ist nämlich λ die nicht homogene Coordinate auf einer Geraden, so drückt jede gebrochene lineare Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda - \beta}{\alpha\lambda - \delta}$ eine Transformation der Geraden aus, welche der Collineation der Ebene oder des Raumes entspricht.

Es sei λ_i eine ν^i-fache Wurzel, so dass die fünfgliedrige Determinante $|\lambda a_{jk} - b_{jk}|$ für $\lambda = \lambda_i$ ν^i-fach verschwindet; nehmen wir ferner an, es verschwänden alle ersten (viergliedrigen) Unterdeterminanten $\nu_1{}^i$-fach; alle zweiten Unterdeterminanten $\nu_2{}^i$-fach etc.*), dann sieht man sofort, dass:

$$\nu^i \geqq \nu_1{}^i \geqq \nu_2{}^i \geqq \cdots.$$

Bezeichnen wir nun die Determinante $|\lambda a_{jk} - b_{jk}|$ durch D und ihre ersten Unterdeterminanten durch D_{jk}, so werden wir offenbar die Differentiationsformel haben:

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} = \sum_1^5{}_j \sum_1^5{}_k a_{jk} D_{jk}.$$

Es wird also $\frac{\partial D}{\partial \lambda}$ wenn $\lambda = \lambda_i$ sicher $\nu_1{}^i$-fach verschwinden, und demnach D selber mindestens $(\nu_1{}^i + 1)$-fach. Hiernach ist $\nu^i > \nu_1{}^i$; und auf ähnliche Weise bekommen wir die Ungleichheit:

$$\nu^i > \nu_1{}^i > \nu_2{}^i > \cdots,$$

bis man zu einem Punkte kommt, wo sämmtliche nachfolgende ν den Werth Null haben. Die Differenzen:

$$e_1{}^i = \nu^i - \nu_1{}^i, \quad e_2{}^i = \nu_1{}^i - \nu_2{}^i, \quad e_3{}^i = \nu_2{}^i - \nu_3{}^i, \cdots$$

sind also positiv bis zu einem gewissen Punkte, von wo an sie sämmtlich Null sind. *Es sind nun die so erhaltenen e die wesentlichen neuen Elemente der Weierstrassischen Theorie.* Schreibt man nun:

$$|\lambda a_{jk} - b_{jk}| = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\nu^i} = \prod_i \left[(\lambda - \lambda_i)^{e_1{}^i} (\lambda - \lambda_i)^{e_2{}^i} \cdots\right],$$

so nennt Weierstrass die einzelnen hier auftretenden Factoren $(\lambda - \lambda_i)^{e_n^i}$ die *Elementartheiler* der Discriminante von $\lambda\Omega - \Phi$. *Ein Elementartheiler ist derjenige Betrag an Factoren $\lambda - \lambda_i$, der verloren geht, wenn man von der ganzen Determinante $|\lambda a_{jk} - b_{jk}|$ zu den ersten Unterdeterminanten schreitet, oder von den ersten Unterdeterminanten zu den zweiten, etc.*

Nun ist die Sachlage die, dass, wie Weierstrass zeigt, neben der schon erwähnten Projectivität der λ_i die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Formenschaaren der hier besprochenen Art einander äquivalent sein sollen, *die Uebereinstimmung der Multiplicitäten e_n^i ihrer Elementartheiler* ist**).

*) Es ist dies natürlich hier so aufzufassen, dass mindestens eine der $n$ten Unterdeterminanten *nur* ν_n^i-fach verschwindet.

**) Dass diese Zahlen e bei zwei äquivalenten Formenschaaren wirklich mit einander übereinstimmen müssen, wird sofort klar, wenn wir zeigen, dass die oben gebrauchten Zahlen ν_n^i bei zwei äquivalenten Formenschaaren mit einander über-

Greifen wir jetzt auf die Unterscheidung nach der Multiplicität der Wurzeln zurück, so werden wir ebensoviele Arten von Cycliden unterscheiden müssen, wie es verschiedene Systeme von Zahlen ν und e giebt. Verabreden wir nun, dass bei einer und derselben Wurzel λ_i die Multiplicitäten e^i der Elementartheiler stets in der Reihenfolge $e_1^i, e_2^i, e_3^i \cdots$ geschrieben werden, so sollte man zunächst meinen, dass man nicht nur die verschiedenen Systeme von Zahlen e bei der Arteintheilung ins Auge fassen müsste, sondern auch die verschiedenen Anordnungen, welche diese Zahlen bei den einzelnen Wurzeln haben können. Indessen zeigt man, dass bei jeder Wurzel nur die eine Anordnung wirklich vorkommen kann, in welcher jede der Zahlen e mindestens ebenso gross ist wie sämmtliche nachfolgenden e. Oder in Formeln ausgedrückt, dass man die Ungleichheiten hat:

$$e_1 \geqq e_2 \geqq e_3 \geqq \cdots {}^{*}).$$

---

einstimmen müssen. Dies aber sehen wir dadurch ein, dass wir eine Anzahl Reihen neuer Variablen u_i, v_i, etc. einführen, welche mit den x_i contragredient sein mögen. Dann sind bekanntermassen die geränderten Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} & \lambda a_{12} - b_{12} \cdots \lambda a_{15} - b_{15} & u_1 \\ \lambda a_{21} - b_{21} & \lambda a_{22} - b_{22} \cdots \lambda a_{25} - b_{25} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{51} - b_{51} & \lambda a_{52} - b_{52} \cdots \lambda a_{55} - b_{55} & u_5 \\ u_1 & u_2 \quad \cdots \quad u_5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} \cdots \lambda a_{15} - b_{15} & u_1 & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{51} - b_{51} \cdots \lambda a_{55} - b_{55} & u_5 & v_5 \\ u_1 \quad \cdots \quad u_5 & 0 & 0 \\ v_1 \quad \cdots \quad v_5 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Contravarianten der Form $\Sigma(\lambda a_{jk} - b_{jk}) x_j x_k$. Wenn man aber die erste dieser Determinanten ausmultiplicirt, so werden die Coefficienten der u einfach die ersten Unterdeterminanten D_{jk} sein. Ebenso werden die Coefficienten der u, v in der zweiten Determinante die zweiten Unterdeterminanten von D sein, etc. Die erste der obenstehenden Determinanten enthält also den Factor $\lambda - \lambda_i$ genau $\nu_1{}^i$-fach, die zweite $\nu_2{}^i$-fach etc. Unterwirft man nun die x einer linearen Substitution, welche $\lambda\Omega - \Phi$ in $\lambda\overline{\Omega} - \overline{\Phi}$ überführt, so werden die aus $\overline{D}$ gebildeten geränderten Determinanten den Factor $\lambda - \lambda_i$ der Definition nach $\overline{\nu}_1{}^i$-, bezw. $\overline{\nu}^i{}_2$- etc. fach enthalten. Wegen der Contravarianz dieser Determinanten schliesst man dann sofort $\nu_n^i = \overline{\nu}_n^i$. Bei der ferneren Umgestaltung von $\lambda\overline{\Omega} - \overline{\Phi}$ in $\lambda'\Omega' - \Phi'$ hat man offenbar $\overline{\nu}_n^i = \nu_n'^i$. Es ist demnach $\nu_n^i = \nu_n'^i$, w. z. b. w.

*) Um diese Ungleichheiten zu beweisen, bedient man sich einer Determinantenidentität, welche wir, indem wir die in der vorangehenden Anmerkung vorkommenden geränderten Determinanten der Kürze halber durch $\begin{vmatrix} D & u \\ u & 0 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} D & u & v \\ u & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$ bezeichnen, folgendermassen schreiben können:

Hiernach können wir diese Arteintheilung der Cycliden durch folgendes Schema festlegen, in welchem die Ziffern die Werthe der e bedeuten sollen, während die Summe der jedesmal zusammengeklammerten Ziffern die zugehörigen v vorstellen*).

	a	b	c	d	e	f	g
I	11111	(11)111	(111)11	(11)(11)1	(1111)1	(111)(11)	(11111)
II	2111	2(11)	2(111)	(21)11	(21(11)	(211)1	(2111)
III	311	3(11)1	(31)1	(311)			
IV	221	2(21)	(22)1	(221)			
V	41	(41)					
VI	32	(32)					
VII	5						

*Es sind dies 27 Fälle, von denen aber der eine, Ig), wie wir sofort sehen werden, in Wegfall kommt**).*

Weiterhin werden wir den einzelnen der hiermit unterschiedenen Fälle auch durch ein geometrisches Schema bezeichnen, indem wir für ihn die Werthe λ_i als Punkte in der Ebene der complexen Zahlen λ markiren und diese Punkte mit Zeichen versehen, welche durch die Anzahl von Strichen, aus denen sie bestehen, die Multiplicitäten der

---

$$\begin{vmatrix} D & u & v \\ u & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot D = \begin{vmatrix} D & u \\ u & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D & v \\ v & 0 \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} D & u \\ v & 0 \end{vmatrix} \right)^2.$$

Die linke Seite dieser Identität enthält nämlich den Factor $(\lambda - \lambda_i)$ genau $(\nu_2^{\,i} + \nu^i)$-fach, die rechte Seite dagegen mindestens $2\nu_1^{\,i}$-fach. Es ist also:

$$\nu_2^{\,i} + \nu^i \geqq 2\nu_1^{\,i}.$$

Und folglich:

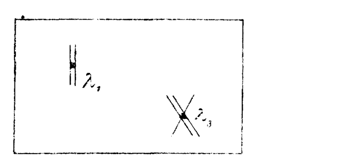
$$\nu^i - \nu_1^{\,i} \geqq \nu_1^{\,i} - \nu_2^{\,i}, \quad \text{d. h.} \quad e_1 \geqq e_2.$$

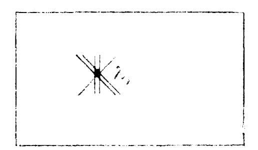
Auf dieselbe Weise fortschreitend beweist man dann auch die anderen Ungleichheiten.

*) So wird z. B. [2(11)1] den Fall bedeuten, in welchem es zwei zweifache Wurzeln und eine einfache Wurzel giebt, und wo die eine Doppelwurzel zu einem zweifachen, die andere zu zwei einfachen Elementartheilern gehört.

**) Man vergl. die früher citirte Abhandlung von Loria: Geometria della Sfera.

betreffenden Wurzeln angeben, während die Vertheilung dieser Multiplicität zwischen verschiedenen Elementartheilen dadurch zur Anschauung gebracht wird, dass jedesmal nur diejenigen Striche, welche zu demselben Elementartheiler gehören, einander parallel liegen. So werden z. B. die Fälle IV b) und IV d), d. h. [2(21)] und [(221)], durch folgende zwei Figuren gekennzeichnet werden können:





Nun haben wir (nach Weierstrass) folgende kanonische Formen für Ω und Φ in den verschiedenen Kategorien I—VII:

$$\text{I}\begin{cases}\Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,\\ \Phi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,\\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_2) + x_1^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2,\\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2x_1x_2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 + x_5^2,\\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_2) + x_1^2 + \lambda_3(2x_3x_4) + x_3^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{V}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + x_5^2,\\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_4 + 2x_2x_3) + 2x_1x_3 + x_2^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{VI}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_1x_5,\\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2x_1x_2 + \lambda_4(2x_1x_5) + x_4^2;\end{cases}$$

$$\text{VII}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2,\\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2) + 2x_1x_4 + 2x_2x_3.\end{cases}$$

Diese kanonischen Formen beziehen sich allerdings ohne Weiteres nur auf die Fälle in der Colonne a) unseres Schemas. Wir bekommen aber die kanonischen Formen für die in den anderen Colonnen stehenden Fälle, indem wir in der kanonischen Form des entsprechenden Falles a) die Wurzeln λ_i einfach in geeigneter Weise zusammenfallen lassen. So ist z. B. die kanonische Form für den Fall I d):

$$\begin{cases}\Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,\\ \Phi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_3 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2.\end{cases}$$

Man erkennt weshalb der Fall Ig) auszulassen ist, weil nämlich Φ dann ein einfaches Multiplum von Ω werden würde und also $\Omega = 0$, $\Phi = 0$ überhaupt keine Fläche vorstellt.

Dass diese kanonischen Formen wirklich Formenschaaren liefern, welche zu dem betreffenden Falle gehören, sieht man sofort, wenn man die verschiedenen Discriminanten hinschreibt. Die Leistung von Weierstrass liegt nun darin, dass er bewiesen hat, dass *jedes* Formenpaar Ω, Φ je nach der Art seiner Elementartheiler *auf die eine oder die andere dieser kanonischen Formen durch lineare Substitution gebracht werden kann* *).

Hier wollen wir nur die auch sonst wohlbekannte Transformation im Falle Ia) angeben **). Da haben wir nämlich die Substitution zu machen:

$$\varrho x_i \sim \varrho_i \sum_1^5{}_j \sum_1^5{}_k a_{jk} x_j^{(i)} \cdot x_k,$$

wo die Constanten $x_j^{(i)}$ aus den linearen Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned}
(\lambda_i a_{11} - b_{11}) x_1^{(i)} + (\lambda_i a_{12} - b_{12}) x_2^{(i)} + \cdots + (\lambda_i a_{15} - b_{15}) x_5^{(i)} &= 0, \\
(\lambda_i a_{21} - b_{21}) x_1^{(i)} + (\lambda_i a_{22} - b_{22}) x_2^{(i)} + \cdots + (\lambda_i a_{25} - b_{25}) x_5^{(i)} &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\lambda_i a_{51} - b_{51}) x_1^{(i)} + (\lambda_i a_{52} - b_{52}) x_2^{(i)} + \cdots + (\lambda_i a_{55} - b_{55}) x_5^{(i)} &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind mit einander verträglich, weil λ_i geradezu als eine Grösse bestimmt war, welche ihre Determinante zum Verschwinden brachte. Sie reichen aber auch aus, die $x^{(i)}$ bis auf einen gemeinsamen Factor zu bestimmen (welcher dann in das ϱ_i aufgenommen werden kann), weil die Unterdeterminanten nach Voraussetzung nicht verschwinden. Diese Substitution bringt Ω und Φ auf die Gestalt:

$$\Omega = \sum_1^5{}_i a_i x_i^2, \qquad \Phi = \sum_1^5{}_i a_i \lambda_i x_i^2,$$

in welcher wir sie im Folgenden sofort benutzen werden. Um schliesslich die zwei Formen genau auf die Weierstrassische Form zu bringen, haben wir nur noch die Substitution zu machen:

$$\varrho x_i \sim \sqrt{a_i} \cdot x_i.$$

---

*) Zugleich gelingt die Transformation in den Fällen a) im Wesentlichen nur auf eine Weise. In seiner Dissertation hat Klein die Frage untersucht, wie oft die Transformation in den Fällen b), c) . . . bewerkstelligt werden kann. Hierauf kommen wir in Kapitel 3, § 4 von geometrischer Seite her zurück.

**) Man vergl. die geometrischen Auseinandersetzungen über gemeinsame Polartetraeder in Kapitel 1, § 3.

In jeder der Kategorien I—VII sind, dem Vorangehenden zufolge, die Fälle b), c), d)... als Speciallfälle von a) anzusehen. Es sind aber auch die Fälle IIa), IIIa)... (und folglich die ganzen Kategorien II, III...) als Specialfälle von Ia) anzusehen, wie durch einen besonderen Grenzübergang klar wird (K). Um diesen Grenzübergang auseinanderzusetzen, müssen wir als Ausgangspunkt die oben gewonnene kanonische Form wählen:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \Omega = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1 a_1 x_1^2 + \lambda_2 a_2 x_2^2 + \lambda_3 a_3 x_3^2 + \lambda_4 a_4 x_4^2 + \lambda_5 a_5 x_5^2. \end{cases}$$

Um von hier aus zur Kategorie II überzugehen, machen wir die Substitution:

$$\lambda_2 \sim \lambda_1 + \varepsilon, \quad x_2 \sim x_1 + \varepsilon x_2,$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung sein soll. Vernachlässigen wir unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, so geht hierdurch das Formenpaar (A) in folgendes über:

$$\Omega = (a_1 + a_2)x_1^2 + 2a_2 \varepsilon x_1 x_2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2,$$
$$\Phi = \lambda_1(a_1 + a_2)x_1^2 + a_2 \varepsilon(x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 x_2) + \lambda_3 a_3 x_3^2 + \lambda_4 a_4 x_4^2 + \lambda_5 a_5 x_5^2.$$

Wenn wir nun hier setzen:

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 \varepsilon = 1, \quad a_3 = a_4 = a_5 = 1,$$

so bekommen wir gerade die Weierstrassische kanonische Form IIa).

Um andererseits vom Formenpaar (A) zum Falle IIIa) überzugehen, machen wir die Substitution:

$$\lambda_2 \sim \lambda_1 + \varepsilon, \qquad x_2 \sim x_1 + \varepsilon x_2,$$
$$\lambda_3 \sim \lambda_1 + \varepsilon', \qquad x_3 \sim x_1 + \varepsilon' x_2 + \eta x_3,$$

wo ε und ε' von der ersten, η von der zweiten Ordnung unendlich klein sind. Wir bekommen dann nach Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen dritter Ordnung:

$$\Omega = (a_1 + a_2 + a_3)x_1^2 + 2(a_2\varepsilon + a_3\varepsilon')x_1 x_2 + (a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon'^2)x_2^2$$
$$+ 2a_3\eta x_1 x_3 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2,$$
$$\Phi = \lambda_1(a_1 + a_2 + a_3)x_1^2 + 2\lambda_1(a_2\varepsilon + a_3\varepsilon')x_1 x_2 + \lambda_1(a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon'^2)x_2^2$$
$$+ 2\lambda_1 a_3 \eta x_1 x_3 + (a_2\varepsilon + a_3\varepsilon')x_1^2 + 2(a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon'^2)x_1 x_2$$
$$+ \lambda_4 a_4 x_4^2 + \lambda_5 a_5 x_5^2.$$

Setzen wir jetzt:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon'^2 = 1, \quad a_4 = a_5 = 1,$$
$$a_2\varepsilon + a_3\varepsilon' = 0, \quad a_3\eta = 1,$$

so bekommen wir gerade das kanonische Formenpaar IIIa).

Auf ganz entsprechende Weise bekommen wir auch die kanonischen Formen IV—VII.

§ 2. Anwendung der Elementartheilertheorie auf die Theorie der confocalen Cyclidensysteme.

Im vorigen Kapitel fanden wir als Gleichung der allgemeinen confocalen Cyclidenschaar:

$$\frac{a_1 x_1^2}{\lambda - e_1} + \frac{a_2 x_2^2}{\lambda - e_2} + \frac{a_3 x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{a_4 x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{a_5 x_5^2}{\lambda - e_5} = 0,$$

wobei wir als Identität zwischen den pentasphärischen Coordinaten folgende voraussetzten:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2 = 0.$$

Jetzt bemerken wir, dass *sämmtliche Flächen dieser Schaar zum Falle Ia) des vorigen Paragraphen gehören.* Wir dürfen also die Schaar selbst durch die Elementartheiler [11111] kennzeichnen. Es soll unsere erste Aufgabe in diesem Paragraphen sein, die Ausartungen dieser Cyclidenschaar zu untersuchen, welche den übrigen Fällen der Elementartheilertheorie entsprechen.

Zunächst bekommen wir, indem wir einige der e_i schlechtweg einander gleich setzen, Orthogonalsysteme, welche wir selbst mit Ib), Ic)... bezeichnen wollen, je nachdem sämmtliche Flächen der Schaar zu dem einen oder dem anderen dieser Fälle gehören. Natürlich können wir in allen diesen Fällen I sämmtliche a_i gleich Eins setzen.

Nun können wir auch Orthogonalsysteme, welche zu den Kategorien II, III... gehören, durch besonderen Grenzübergang finden.

Setzen wir zunächst nach Analogie mit Seite 56:

$$e_2 \sim e_1 + \varepsilon, \quad x_2 \sim x_1 + \varepsilon x_2,$$

so bekommen wir:

$$\begin{cases} \Omega \equiv (a_1 + a_2)x_1^2 + 2a_2\varepsilon x_1 x_2 + a_3x_3^3 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2 = 0, \\ \Phi \equiv \frac{a_1 x_1^2}{\lambda - e_1} + \frac{a_2(x_1^2 + 2\varepsilon x_1 x_2)}{\lambda - e_1} + \frac{a_2 \varepsilon x_1^2}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{a_3 x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{a_4 x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{a_5 x_5^2}{\lambda - e_5} = 0. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt ferner:

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 \varepsilon = 1, \quad a_3 = a_4 = a_5 = 1,$$

so erhalten wir:

$$\begin{cases} \Omega \equiv \quad 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ \Phi \equiv \frac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{2x_1x_2}{\lambda - e_1} + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0. \end{cases}$$

Jede Cyclide dieser Schaar gehört, wie leicht zu sehen ist, zum Falle IIa), obwohl ihre Gleichung hier nicht genau in der Weierstrassischen kanonischen Form geschrieben ist. Wir werden also diese Schaar das Cyclidensystem IIa) nennen, und bekommen dann die Cyclidensysteme IIb), IIc)... durch blosse Gleichsetzung verschiedener e_i.

Um andererseits von der Kategorie I zur Kategorie III überzugehen machen wir, ähnlich wie auf Seite 56, den Grenzübergang:

$$\begin{aligned} e_2 &\sim e_1 + \varepsilon, & x_2 &= x_1 + \varepsilon x_2, \\ e_3 &\sim e_1 + \varepsilon', & x_3 &= x_1 + \varepsilon' x_2 + \eta x_3, \end{aligned}$$

und setzen hinterher:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0, & a_3\varepsilon^2 + a_3\varepsilon'^2 &= 1, \\ a_2\varepsilon + a_3\varepsilon' &= 0, & a_3\eta &= 1, \end{aligned} \quad a_4 = a_5 = 1.$$

Auf diese Weise bekommen wir als Cyclidenschaar IIIa):

$$\begin{cases} \Omega \equiv \quad 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ \Phi \equiv \frac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^3} + \frac{2x_1x_2}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{2x_1x_3 + x_2^2}{\lambda - e_1} + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0. \end{cases}$$

Die Fälle IIIb), IIIc)... sind wieder durch Gleichsetzen der e_i zu bekommen.

In ähnlicher Weise können wir den Grenzübergang zu den anderen Kategorien IV, V... machen, doch hierauf gehen wir der Kürze halber nicht ein, zumal da wir, wie sich bald herausstellen wird, die dadurch zu gewinnenden Formeln nicht nöthig haben.

Jetzt stellen wir folgendes Theorem auf:

Wenn man statt der Constanten e_i des allgemeinen confocalen Cyclidensystems irgend welche lineare Functionen $\frac{\alpha e_i + \beta}{\gamma e_i + \delta}$ substituirt, so ändert sich das Flächensystem nicht, nur der Parameterwerth wird geändert, der den einzelnen Flächen beigelegt wird.

Setzen wir nämlich:

$$e_i = \frac{\alpha e_i' + \beta}{\gamma e_i' + \delta},$$

und gleichzeitig:

$$\lambda = \frac{\alpha \lambda' + \beta}{\gamma \lambda' + \delta},$$

(welche letzte Substitution natürlich nur den Parameterwerth ändert, welcher zu den einzelnen Flächen gehört), so nimmt die Gleichung: $\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$ der Flächenschaar die Gestalt an:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2 (\gamma e_i' + \delta)(\gamma \lambda' + \delta)}{(\lambda' - e_i')(\alpha\delta - \beta\gamma)} = 0;$$

oder einfach:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2 (\gamma e_i' + \delta)}{\lambda' - e_i'} \equiv \sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2 (\gamma \lambda' + \delta)}{\lambda' - e_i'} - \gamma \sum_1^5 {}_i x_i^2 = 0.$$

Wenn wir also die Identität $\sum_1^5 {}_i x_i^2 = 0$ berücksichtigen, bekommen wir als Gleichung der Flächenschaar:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda' - e_i'} = 0,$$

welches einfach die alte Gleichung der Flächenschaar ist, worin an Stelle der e_i bestimmte lineare Functionen derselben substituirt sind. Dieses Resultat können wir auch mit folgenden Worten zusammenfassen:

Im Sinne der Geometrie der reciproken Radien ist eine allgemeine confocale Cyclidenschaar durch die zwei unabhängigen Doppelverhältnisse) aus den fünf Constanten e_i charakterisirt.*

Diese Betrachtungen bedürfen in den Kategorien II, III ... einer kleinen Modification. Machen wir nämlich im Flächensysteme IIa):

$$\frac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{2 x_1 x_2}{\lambda - e_1} + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0,$$

die Substitution

$$\lambda = \frac{\alpha \lambda' + \beta}{\gamma \lambda' + \delta}, \quad e_i = \frac{\alpha e_i' + \beta}{\gamma e_i' + \delta},$$

so bekommen wir nach ähnlicher Umrechnung wie soeben:

---

*) Wegen des Begriffes des Doppelverhältnisses vergl. man ein beliebiges Lehrbuch der neueren Geometrie. Derselbe tritt bei uns nur an dieser Stelle beiläufig auf.

$$\text{(A)}\quad \frac{x_1^2(\gamma e_1'+\delta)^2}{(\lambda'-e_1')^2(\alpha\delta-\beta\gamma)}+\frac{2x_1x_2}{\lambda'-e_1'}+\frac{x_3^2}{\lambda'-e_3'}+\frac{x_4^2}{\lambda'-e_4'}+\frac{x_5^2}{\lambda'-e_5'}=0;$$

eine Gleichung, welche erst durch die Kreisverwandtschaft:

$$x_1\sim\frac{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\gamma e_1'+\delta}\cdot x_1,\qquad x_3\sim x_3,$$
$$x_4\sim x_4,$$
$$x_2\sim\frac{\gamma e_1'+\delta}{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}\cdot x_2,\qquad x_5\sim x_5,$$

in die ursprüngliche Gestalt übergeht.

Wenn wir in der Kategorie III bei der Flächenschaar:

$$\frac{x_1^2}{(\lambda-e_1)^3}+\frac{2x_1x_2}{(\lambda-e_1)^2}+\frac{2x_1x_3+x_2^2}{\lambda-e_1}+\frac{x_4^2}{\lambda-e_4}+\frac{x_5^2}{\lambda-e_5}=0$$

dieselbe Substitution und eine ähnliche Umrechnung machen, so geht dieselbe über in:

$$\text{(B)}\begin{cases}\dfrac{x_1^2(\gamma e_1'+\delta)^4}{(\lambda'-e_1')^3(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}+\dfrac{(\gamma e_1'+\delta)^2x_1\left[\dfrac{\gamma(\gamma e_1'+\delta)}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_1+2x_2\right]}{(\lambda'-e_1')^2(\alpha\delta-\beta\gamma)}+\dfrac{2x_1x_3+x_2^2}{\lambda'-e_1'}+\\ \qquad+\dfrac{x_4^2}{\lambda'-e_4'}+\dfrac{x_5^2}{\lambda'-e_5'}=0\end{cases}$$

eine Gleichung, welche durch die Kreisverwandtschaft:

$$x_1\sim\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma e_1'+\delta)^2}x_1,\qquad x_4\sim x_4,$$
$$x_2\sim\frac{-\gamma}{2(\gamma e_1'+\delta)}x_1+x_2,\qquad x_5\sim x_5,$$
$$x_3\sim\frac{-\gamma^2}{8(\alpha\delta-\beta\gamma)}x_1+\frac{\gamma(\gamma e_1'+\delta)}{2(\alpha\delta-\beta\gamma)}x_2+\frac{(\gamma e_1'+\delta)^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_3,$$

in die ursprüngliche Gestalt übergeht.

Auf die entsprechende Transformation in den Kategorien IV—VII gehen wir der Kürze halber nicht ein.

Wir finden also, dass, obwohl die Cyclidenschaar nach linearer Substitution der e_i nur in der Kategorie I absolut ungeändert bleibt, sie doch in den anderen Kategorien nur einer Kreisverwandtschaft unterworfen wird. Wir können also sagen:

Im Falle Ia) giebt es im Sinne der Geometrie der reciproken Radien ∞^2 verschiedene Cyclidensysteme; in den beiden Fällen Ib) und IIa) je ∞^1, während in jedem der anderen Fälle alle Cyclidenschaaren derselben Art mit einander kreisverwandt sind.

Ehe wir diese Betrachtungen abschliessen, müssen wir noch insbesondere den Fall erwähnen, wo der Werth e_1, welcher zu einem

mehrfachen Elementartheiler gehört, ins Unendliche geworfen wird, wo also in der Kategorie II oder III $e_1' = \infty$. Hier sind die soeben angeschriebenen Kreisverwandtschaften mit unendlichen Coefficienten behaftet, indem $\gamma e_1' + \delta = \infty$. Den Grund hierfür findet man darin, dass, wenn man an Stelle von e_1 in den Kategorien II, III ... schlechtweg den Werth ∞ setzt, die resultirende Flächenschaar nicht nur mit der ursprünglichen nicht kreisverwandt ist, sondern nicht einmal zu derselben Kategorie gehört, sondern zur Kategorie I. Dieser Fall bedarf also einer besonderen Behandlung, welche wir jedoch nur für die Kategorien II, III angeben wollen.

Wir dürfen selbstverständlich, auch wenn wir $e_1' = \infty$ nehmen wollen, die Gleichungsformen (A) und (B) zugrundelegen. Setzen wir darin $e_1' = \infty$, so haben unsere Flächenschaaren die Gleichungen:

$$\text{(C)} \qquad \frac{\gamma^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1^2 + \frac{x_3^2}{\lambda' - e_3'} + \frac{x_4^2}{\lambda' - e_4'} + \frac{x_5^2}{\lambda' - e_5'} = 0,$$

$$\text{(D)} \qquad -\frac{\gamma^3(\gamma\lambda' + \delta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} x_1^2 + \frac{2\gamma^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1 x_2 + \frac{x_4^2}{\lambda' - e'_4} + \frac{x_5^2}{\lambda' - e'_5} = 0.$$

Diese zwei Gleichungen können wir nun zwar nicht auf die ursprünglichen Formen II und III durch Kreisverwandtschaft zurückführen, wohl aber auf folgende zwei einfachere Formen (wo wir der Einfachheit halber λ' und e_i' durch λ und e_i ersetzt haben):

$$\text{(E)} \qquad -x_1^2 + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0,$$

$$\text{(F)} \qquad -\lambda x_1^2 + 2x_1 x_2 + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0.$$

Im Folgenden werden wir von diesen Flächenschaaren (E) und (F) sagen, dass sie die Flächenschaaren II und III sind, wo $e_1 = \infty$. Natürlich ist (E) mit solchen Flächenschaaren IIa) kreisverwandt, deren e_i dasselbe Doppelverhältniss haben, wie die Werthe ∞, e_3, e_4, e_5 in (E); (F) dagegen mit jeder Flächenschaar IIIa) kreisverwandt.

§ 3. Realitätsverhältnisse. Entsprechende Modification der Elementartheilertheorie.

Bis jetzt haben wir in diesem Kapitel den Unterschied zwischen reell und imaginär vollständig ausser Acht gelassen. Bei den Untersuchungen der mathematischen Physik aber, welche unser Zielpunkt sind, kommt dieser Unterschied in zweierlei Weise zur Geltung: 1) Man hat nur *reelle* Flächen in Betracht zu ziehen; 2) man darf

nur solche Flächen als gleichberechtigt ansehen, welche durch *reelle* Kreisverwandtschaft in einander übergeführt werden können. Sehen wir denn zu, inwiefern unsere Theorie durch diese Umstände modificirt wird.

Legen wir ein reelles pentasphärisches Coordinatensystem zu Grunde, so werden wir (vergl. S. 30) die Gleichung jeder reellen Cyclide mit lauter reellen Coefficienten schreiben können. Ferner kann die Identität bei einem solchen Coordinatensystem auch mit reellen Coefficienten geschrieben werden. Hiernach wird die Gleichung zur Bestimmung der Wurzeln λ_i für diese Cyclide mit lauter reellen Coefficienten geschrieben werden können, und die λ_i selbst werden, sofern sie nicht reell sind, einander paarweise conjugirt imaginär sein müssen. Wenn nun insbesondere die Cyclide zur Kategorie I gehört, sehen wir mit leichter Mühe, dass sich, wenn wir die Identität auf die Form $\sum_1^5 {}_i\, a_i x_i^2 = 0$ bringen, vermöge der Transformation von Seite 55 die Coordinaten x_i sowie auch die Constanten a_i ebenso verhalten werden, wie die entsprechenden λ_i, was die Realität angeht. Wenn wir also die Identität auf die Form $\sum_1^5 {}_i\, x_i^2 = 0$ durch die letzte Substitution von Seite 55 reduciren, werden diejenigen Paare von Coordinaten x_i, welche conjugirt imaginären λ_i entsprechen, noch conjugirt imaginär sein; diejenigen x_i aber, welche reellen λ_i entsprechen, können ebensowohl rein imaginär als reell sein, je nachdem a_i negativ oder positiv. Dieses Resultat können wir dann durch die Grenzübergänge von Seite 56 auf die Kategorien II—VII ausdehnen. Insbesondere werden mehrere x_i, welche zu einem einzigen λ_i gehören (wie z. B. x_1, x_2, x_3 zu λ_1 im Falle IIIa), sämmtlich reell sein müssen, wenn das λ_i reell ist; wenn aber das λ_i complex ist, muss es ein anderes ihm conjugirt imaginäres λ_i geben, zu welchem ebenso viele x_i gehören, welche dann mit den ersten x_i paarweise conjugirt imaginär sein werden.

Hierdurch sieht man, dass bei der Reduction reeller Cycliden auf die Weierstrassischen kanonischen Formen nur Coordinatensysteme der sechs Arten von Seite 41—42 auftreten können. Ferner sieht man aber auch, dass von diesen noch die drei Arten B''), B'''), C) auszuschliessen sind, denn z. B. für Cycliden der Kategorie IV dürfen nicht, wie bei dem Coordinatensystem C) x_3 mit x_4, conjugirt imaginär sein, sondern etwa x_3 mit x_1 und x_4 mit x_2. Wir gewinnen dann schliesslich folgenden Satz:

Insofern wir uns auf reelle Cycliden beschränken, kommen die Kategorien IV—VII in Wegfall. Die Kategorien II und III bleiben ungeändert bestehen; während die Kategorie I in zwei neue Kategorien I′ und I″ zu spalten ist, je nachdem lauter reelle Wurzeln oder zwei imaginäre Wurzeln auftreten.

Die Cycliden I′a) haben, wie man sofort sieht, fünf reelle Symmetriekugeln, von denen eine nulltheilig; im Falle I″a) giebt es drei reelle und zwei conjugirt imaginäre Symmetriekugeln.

In den Fällen IIa) und IIIa) sind drei reelle (eintheilige) Grundkugeln vorhanden und zwei reelle Punktkugeln. In diesen zwei letzten Fällen sind aber die Grundkugeln keineswegs sämmtlich Symmetriekugeln. In der That können Punktkugeln höchstens in uneigentlichem Sinne als Symmetriekugeln angesehen werden, nämlich dann, wenn sie als Grenzfall eigentlicher Symmetriekugeln auftreten. Aber auch in diesem uneigentlichen Sinne ist in den Fällen IIa) und IIIa) jedesmal nur eine der Punktgrundkugeln (nämlich $x_1 = 0$) Symmetriekugel. Dagegen sind im Falle IIa) alle drei eigentlichen Grundkugeln, im Falle IIIa) zwei derselben, Symmetriekugeln.

Alle diese Resultate sind ohne Weiteres auf Cyclidensysteme zu übertragen; man sieht dann mit leichter Mühe die Richtigkeit folgenden Satzes ein:

Wenn wir nur reelle Flächenschaaren in Betracht ziehen wollen, so können wir uns auf reelle Werthe des Parameters λ beschränken. Dann müssen die e_i alle reell sein, mit Ausnahme der Fälle der Kategorie I″, wo zwei von ihnen einander conjugirt imaginär sind.

§ 4. **Aufzählung der reellen Systeme confocaler Cycliden.**

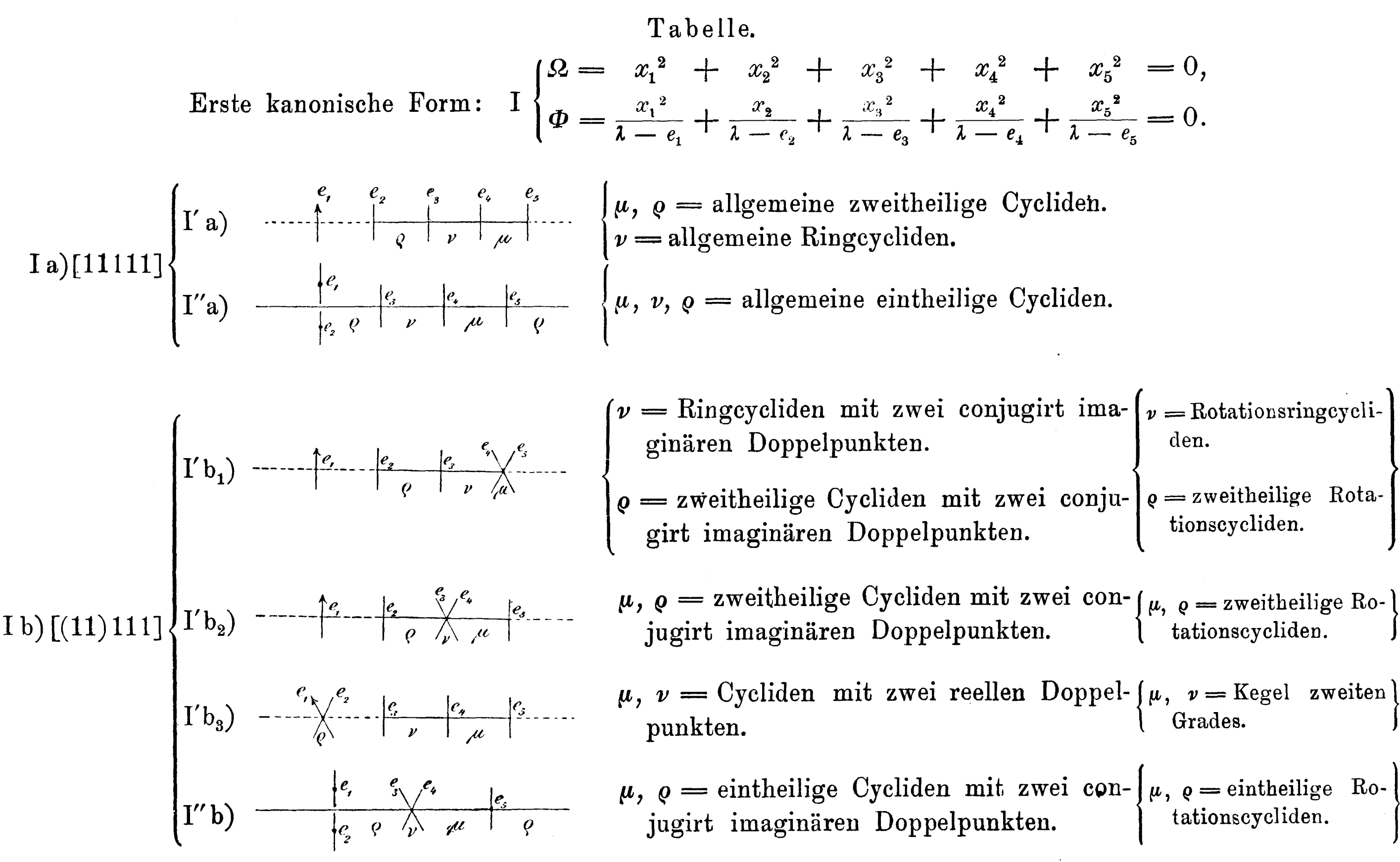
Wir sind jetzt im Stande, eine vollständige Aufzählung der reellen Systeme confocaler Cycliden zu geben. Wie die verschiedenen hierbei in Betracht kommenden Schaaren sich gestaltlich verhalten, sehen wir am einfachsten dadurch, dass wir anstatt der pentasphärischen Coordinaten zunächst mittelst der Formeln von Seite 41—42 Cartesische Coordinaten einführen, die besonderen so dargestellten Flächensysteme untersuchen und uns dann eine beliebige reelle Kreisverwandtschaft ausgeführt denken. Wir können auf diese Weise folgende Tabelle entwerfen, in welcher wir jeden Fall auf Grund der auf Seite 54 getroffenen Verabredung mit einem Schema begleiten. Dabei sollen diese Schemata noch dadurch vervollständigt werden, dass wir den Strich, welcher der bei der Kategorie I′ auftretenden *nulltheiligen*

Kugel entspricht, mit einer Pfeilspitze versehen. Wir werden nun diese Schemata geradezu als in der Ebene der complexen Zahlen λ gelegen ansehen. Jedem Punkte unserer horizontalen Mittellinie, als der Axe der reellen Zahlen, entspricht dann eine reelle Cyclide der Schaar. Diese Fläche kann dabei *nulltheilig* sein, d. h. bis auf reelle singuläre Punkte oder Curven keine anderen reellen Punkte besitzen. Ich habe diejenigen Theile der reellen Axe, denen solche nulltheilige Flächen entsprechen, in den Schemata nur punktirt.

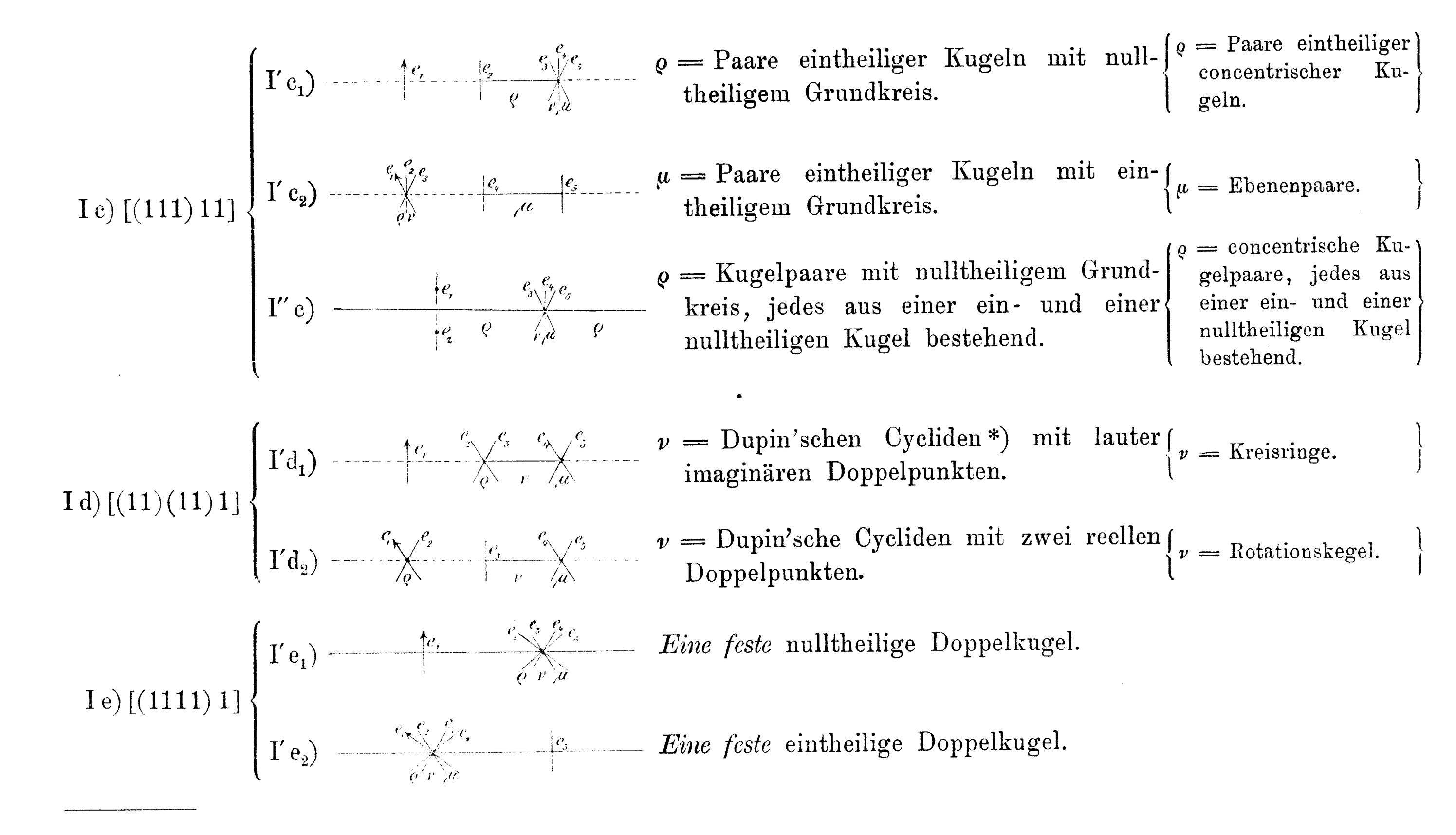
Diejenigen reellen Flächen, welche (abgesehen von etwaigen isolirten Doppelpunkten) nur einen durchaus zusammenhängenden reellen Theil besitzen, bezeichnen wir als *eintheilig* oder als *ringförmig*, je nachdem dieser reelle Theil im Sinne der gewöhnlich gebrauchten Ausdrucksweise der Analysis situs einfach oder dreifaeh zusammenhängend ist. Flächen, deren reeller Theil aus zwei getrennten Schaalen besteht, bezeichnen wir als *zweitheilig;* eine jede dieser Schaalen ist dann nothwendig einfach zusammenhängend. Wenn die Fläche einen reellen nicht isolirten Doppelpunkt besitzt, so sind diese Bezeichnungen natürlich nicht ohne Weiteres anwendbar. Es kann aber eine solche Fläche immer auf zwei Weisen als Grenzfall einer singularitätenfreien Cyclide angesehen werden, und wir können dementsprechend zur Beschreibung ihrer Gestalt eine doppelte Bezeichnung (z. B. einzweitheilig) gebrauchen.

Tabelle.

Erste kanonische Form: I $\begin{cases} \Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ \Phi = \dfrac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \dfrac{x_2^2}{\lambda - e_2} + \dfrac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \dfrac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0. \end{cases}$

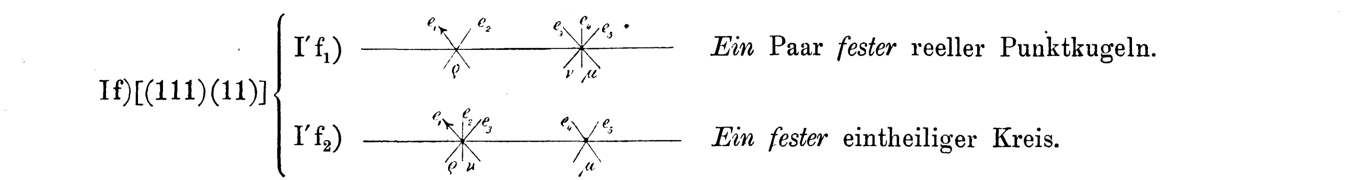


Typus		Schema	Cycliden	Rotationscycliden
I a) [11111]	I′a)		μ, ϱ = allgemeine zweitheilige Cycliden. ν = allgemeine Ringcycliden.	
	I″a)		μ, ν, ϱ = allgemeine eintheilige Cycliden.	
I b) [(11) 111]	I′b₁)		ν = Ringcycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	ν = Rotationsringcycliden.
			ϱ = zweitheilige Cycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	ϱ = zweitheilige Rotationscycliden.
	I′b₂)		μ, ϱ = zweitheilige Cycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	μ, ϱ = zweitheilige Rotationscycliden.
	I′b₃)		μ, ν = Cycliden mit zwei reellen Doppelpunkten.	μ, ν = Kegel zweiten Grades.
	I″b)		μ, ϱ = eintheilige Cycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	μ, ϱ = eintheilige Rotationscycliden.



Typ	Fall		Reell	Im Sonderfall
I c) [(111) 11]	I′ c_1)		ϱ = Paare eintheiliger Kugeln mit nulltheiligem Grundkreis.	ϱ = Paare eintheiliger concentrischer Kugeln.
	I′ c_2)		μ = Paare eintheiliger Kugeln mit eintheiligem Grundkreis.	μ = Ebenenpaare.
	I″ c)		ϱ = Kugelpaare mit nulltheiligem Grundkreis, jedes aus einer ein- und einer nulltheiligen Kugel bestehend.	ϱ = concentrische Kugelpaare, jedes aus einer ein- und einer nulltheiligen Kugel bestehend.
I d) [(11) (11) 1]	I′ d_1)		ν = Dupin'schen Cycliden*) mit lauter imaginären Doppelpunkten.	ν = Kreisringe.
	I′ d_2)		ν = Dupin'sche Cycliden mit zwei reellen Doppelpunkten.	ν = Rotationskegel.
I e) [(1111) 1]	I′ e_1)		*Eine feste* nulltheilige Doppelkugel.	
	I′ e_2)		*Eine feste* eintheilige Doppelkugel.	

*) Vergl. Anm. S. 5.

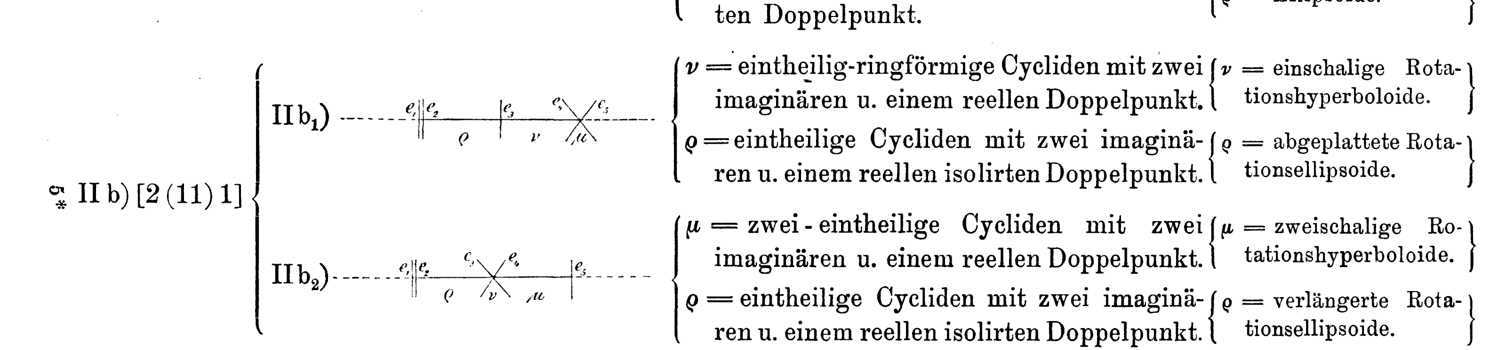


If)[(111)(11)]

- I′f$_1$) *Ein* Paar *fester* reeller Punktkugeln.
- I′f$_2$) *Ein fester* eintheiliger Kreis.

Zweite kanonische Form: II

$$\begin{cases} \Omega = 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ \Phi = \dfrac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^2} + \dfrac{2x_1x_2}{\lambda - e_1} + \dfrac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \dfrac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0. \end{cases}$$



II a) [2111]

- μ = zwei-eintheilige Cycliden mit einem Doppelpunkt. { μ = zweischalige Hyperboloide. }
- ν = eintheilig-ringförmige Cycliden mit einem Doppelpunkt. { ν = einschalige Hyperboloide. }
- ϱ = eintheilige Cycliden mit einem isolirten Doppelpunkt. { ϱ = Ellipsoide. }

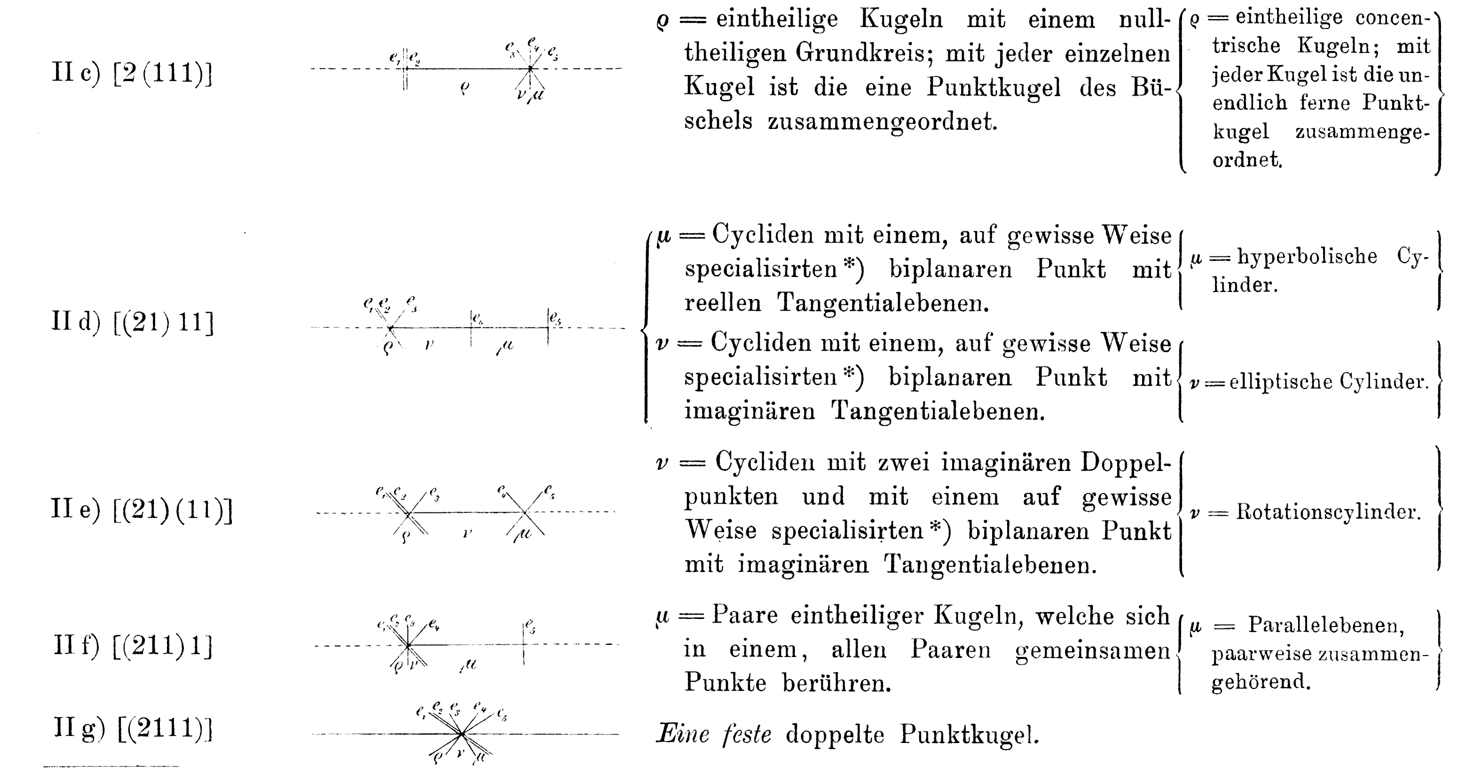
II b) [2(11)1]

II b$_1$)

- ν = eintheilig-ringförmige Cycliden mit zwei imaginären u. einem reellen Doppelpunkt. { ν = einschalige Rotationshyperboloide. }
- ϱ = eintheilige Cycliden mit zwei imaginären u. einem reellen isolirten Doppelpunkt. { ϱ = abgeplattete Rotationsellipsoide. }

II b$_2$)

- μ = zwei-eintheilige Cycliden mit zwei imaginären u. einem reellen Doppelpunkt. { μ = zweischalige Rotationshyperboloide. }
- ϱ = eintheilige Cycliden mit zwei imaginären u. einem reellen isolirten Doppelpunkt. { ϱ = verlängerte Rotationsellipsoide. }



II c) [2 (111)]		ϱ = eintheilige Kugeln mit einem nulltheiligen Grundkreis; mit jeder einzelnen Kugel ist die eine Punktkugel des Büschels zusammengeordnet.	ϱ = eintheilige concentrische Kugeln; mit jeder Kugel ist die unendlich ferne Punktkugel zusammengeordnet.
II d) [(21) 11]		μ = Cycliden mit einem, auf gewisse Weise specialisirten *) biplanaren Punkt mit reellen Tangentialebenen.	μ = hyperbolische Cylinder.
		ν = Cycliden mit einem, auf gewisse Weise specialisirten *) biplanaren Punkt mit imaginären Tangentialebenen.	ν = elliptische Cylinder.
II e) [(21) (11)]		ν = Cycliden mit zwei imaginären Doppelpunkten und mit einem auf gewisse Weise specialisirten *) biplanaren Punkt mit imaginären Tangentialebenen.	ν = Rotationscylinder.
II f) [(211) 1]		μ = Paare eintheiliger Kugeln, welche sich in einem, allen Paaren gemeinsamen Punkte berühren.	μ = Parallelebenen, paarweise zusammengehörend.
II g) [(2111)]		*Eine feste* doppelte Punktkugel.	

*) Die im Texte nur angedeuteten Specialisirungen beziehen sich auf gewisse imaginäre Geraden, und brauchen hier nicht angegeben zu werden, da sie die Gestalt der Flächen in keiner Weise anschaulicher machen könnten.

Dritte kanonische Form: III

$$\text{III}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,\\ \Phi = \dfrac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^3} + \dfrac{2x_1x_2}{(\lambda - e_1)^2} + \dfrac{2x_1x_3 + x_2^2}{\lambda - e_4} + \dfrac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0.\end{cases}$$

Typ		Cycliden	Grenzfall
III a) [311]	$\varrho \; e_1 e_2 e_3 \; \nu \; e_4 \; \mu \; e_5 \; \varrho$	ν, ϱ = Cycliden mit einem biplanaren Punkt mit imaginären Tangentialebenen.	ν, ϱ = elliptische Paraboloide.
		μ = Cycliden mit einem biplanaren Punkt mit reellen Tangentialebenen.	μ = hyperbolische Paraboloide.
III b) [3 (11)]	$\varrho \; e_1 e_2 e_3 \; \nu \; e_4 e_5 \; \mu \; \varrho$	ν, ϱ = Cycliden mit zwei imaginären Doppelpunkten, und mit einem biplanaren Punkte mit imaginären Tangentialebenen.	ν, ϱ = Rotationsparaboloide.
III c) [(31) 1]	$\varrho \; e_1 e_2 e_3 e_4 \; \nu \; \mu \; e_5 \; \varrho$	μ, ϱ = Cycliden mit einem uniplanaren Punkte.	μ, ϱ = parabolische Cylinder.
III d) [(311)]	$\varrho \; e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \; \nu \; \mu \; \varrho$	ϱ = eintheilige, sich in einem Punkte berührende Kugeln; mit jeder Kugel ist der Berührungspunkt als Punktkugel zusammengeordnet.	ϱ = Parallelebenen; mit jeder Ebene ist die unendlich ferne Punktkugel zusammengeordnet.

Zu dieser Tabelle fügen wir noch folgende Bemerkungen:

Wir haben in der Tabelle neben der Benennung der im Allgemeinen auftretenden Flächen jedesmal die Benennung demselben Falle angehöriger besonders einfacher Flächen eingeklammert; aus diesen besonderen Flächen gehen die allgemeinen Flächen des Falles jeweils durch reelle Kreisverwandtschaft hervor.

Durch nähere Untersuchung ergiebt sich, dass es in den allgemeinen Fällen I′a) und I″a) beidemal drei wesentlich verschiedene Arten von eigentlichen (d. h. nicht imaginären oder nulltheiligen) Flächen giebt. Dieselben haben wir in der Tabelle bezw. mit den Buchstaben μ, ν, ϱ bezeichnet. Ferner findet man, wie wir im nächsten Kapitel näher ausführen werden, dass die Flächen jeder dieser drei Arten den reellen Raum gerade einfach ausfüllen; wir werden also, etwas ungenau, von einer μ-Schaar, ν-Schaar und ϱ-Schaar unserer Flächen sprechen dürfen. Sofern man nun nicht nur zwei Punkte e_i, sondern auch die zugehörigen Elementartheiler zusammenfallen lässt, bleibt die Anzahl dieser Schaaren eigentlicher Flächen, wie die Tabelle aufweist, ungeändert. Lässt man aber zwei e_i zusammenfallen, ohne dass es die zugehörigen Elementartheiler thun, so geht in dem verschwindenden Intervalle jedesmal eine der in Rede stehenden Schaaren eigentlicher Flächen verloren. Auf die Erklärung dieses Umstandes und die Ergänzung, die wir alsdann unserem Flächensystem hinzufügen müssen, gehen wir erst in den nächsten Kapiteln näher ein. In der Tabelle haben wir diesen Umstand, bezw. die späterhin zu gebende Erläuterung, insofern berücksichtigt, dass wir immer einen oder auch mehrere der Buchstaben μ, ν, ϱ zwischen die Striche des dem betreffenden Punkte beigefügten Zeichens gesetzt haben. Es ist in dieser Hinsicht besonders zu bemerken, dass in den Fällen I e), I f), II g) in der hiermit angedeuteten Weise alle eigentlichen Flächenschaaren verschwunden sind, sodass allen nicht singulären Werthen von λ ein und dieselbe *feste* Fläche zugehört.

Schliesslich fassen wir einige der wichtigsten Ergebnisse der Tabelle folgendermassen zusammen:

Wenn eine Doppelwurzel (11) *auftritt, bekommen die Flächen der Schaaren zwei gemeinsame Doppelpunkte.*

Wenn eine dreifache Wurzel (111) *auftritt, bekommen die Flächen der Schaaren einen gemeinsamen Doppelkreis, und arten also sämmtlich in Kugelpaare eines und desselben Kugelbüschels aus.*

Wenn eine vierfache Wurzel (1111) *auftritt, bekommen alle Flächen der Schaaren eine und dieselbe Doppelkugel, d. h. sie arten sämmtlich in diese eine doppeltzählende Kugel aus.*

In diesen drei Fällen besteht das betreffende Doppelelement aus sämmtlichen Punkten, welche auf allen übrigen Grundkugeln des kanonischen Coordinatensystems liegen.

Wenn eine mehrfache Wurzel eintritt, bei der nicht alle Elementartheiler einfach sind, bekommen alle Flächen der Schaar eine gemeinsame Singularität, nämlich im Falle einer Doppelwurzel (2) *einen gewöhnlichen Doppelpunkt, in allen anderen Fällen eine höhere Singularität (einen biplanaren Punkt etc.).*

Hierzu fügen wir noch einen Satz hinzu, der für die physikalischen Anwendungen wichtig sein wird:

Die Flächenschaar wird dann und nur dann zu einem Kugelbüschel, wenn eine mehrfache Wurzel auftritt, bei der drei verschiedene Elementartheiler vorhanden sind.

Andererseits können wir aus der Natur der Wurzeln gewisse Symmetrieverhältnisse sofort ablesen. Hierüber sprechen wir folgenden Satz aus, worin man beachten muss, dass nur von den Symmetriekugeln (unter welchen auch die Punktsymmetriekugeln, vergl. S. 63, zu verstehen sind), nicht aber von den anderen Grundkugeln die Rede ist:

Tritt eine mehrfache Wurzel auf, bei welcher nicht alle Elementartheiler zusammenfallen, so werden die Flächen der Schaar nicht nur in Bezug auf die zum mehrfachen Punkte gehörigen Symmetriekugeln symmetrisch sein, sondern auch in Bezug auf jede Kugel, welche durch den Schnitt dieser Kugeln hindurchgeht.

In allen solchen Fällen kann also das kanonische Coordinatensystem auf unendlich viele verschiedene Weisen gewählt werden, wie dies in der Inauguraldissertation von Klein (vergl. Anm. S. 55) auf analytischem Wege bewiesen wurde.

Kapitel 4.

Beschreibung der Gestalt der verschiedenen confocalen Cyclidenschaaren.

Nun haben wir noch die Aufgabe, die Gestalt der verschiedenen Cyclidenschaaren näher zu beschreiben, und, soweit dies ohne Modelle möglich ist, der Anschauung zugänglich zu machen. Es handelt sich dabei um qualitative Betrachtungen durchaus einfacher Natur, deren Resultate allein im vorliegenden Kapitel angegeben werden sollen.

Hier greifen wir zunächst wieder zum entsprechenden zweidimensionalen Probleme zurück, wo wir die ganze Sache durch Figuren*) anschaulich machen können.

§ 1. Von der Gestalt der allgemeinen Systeme confocaler cyclischer Curven.

In der Ebene giebt es gerade wie im Raume zwei solche Systeme, deren Gleichungen ich weiter nicht anschreibe. Dieselben entsprechen den Schemata:

A') e_1 e_2 ν e_3 μ e_4 μ, ν = zweitheilige cyclische Curven.

A'') e_1 e_2 μ e_3 ν e_4 μ μ, ν = eintheilige cyclische Curven.

Diese Curvenschaaren stellen sich, wenn wir nur die symmetrischen Fälle ins Auge fassen (d. h. die Fälle, wo zwei der Symmetriekreise Geraden sind), wie in den nebenstehenden Figuren angegeben ist, dar.

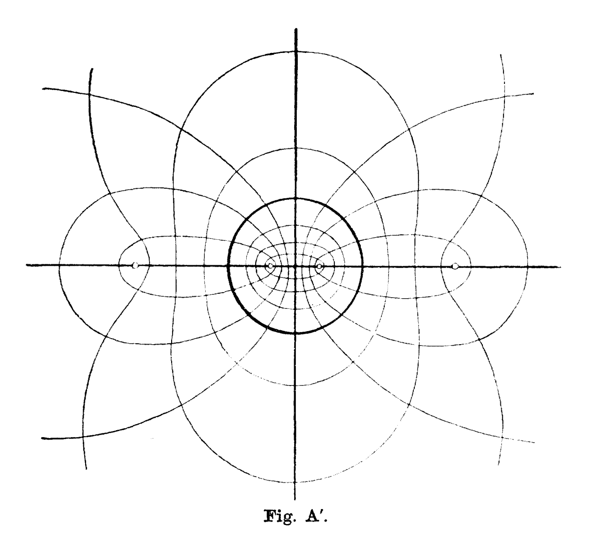


Fig. A'.

Man bemerke in diesen Figuren, dass Stücke der Symmetriekreise (bezw. -geraden) doppeltüberdeckt als Grenzfälle der Curven der Schaar anzusehen sind. Dies haben wir in den Figuren durch starke Auszeichnung dieser Curven angedeutet. Durch nähere Untersuchung stellt es sich heraus, dass die Punkte, welche diese Stücke von einander abgrenzen, und welche in den Figuren durch kleine Kreise ausgezeichnet sind, die reellen Brennpunkte sind, welche allen Curven der Schaar gemeinsam sind**).

*) Die meisten Figuren dieses Kapitels, welche Curvenschaaren darstellen, finden sich schon bei Holzmüller: Theorie der isogonalen Verwandtschaften.

**) Wenn wir den Nachweis nicht liefern, dass diese Punkte im Poncelet-Plücker'schen Sinne wirklich Brennpunkte sind und sogar diesen Begriff des

Nun sieht man ferner, dass im Falle A″) die zwei Symmetrieaxen einander völlig gleichberechtigt sind, indem sie beide zwei reelle Brennpunkte tragen, während dies im Falle A′) nicht der Fall ist*).

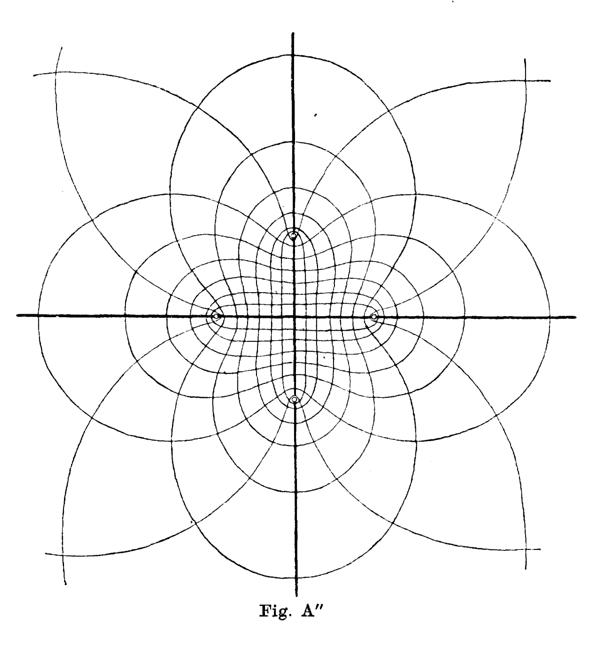
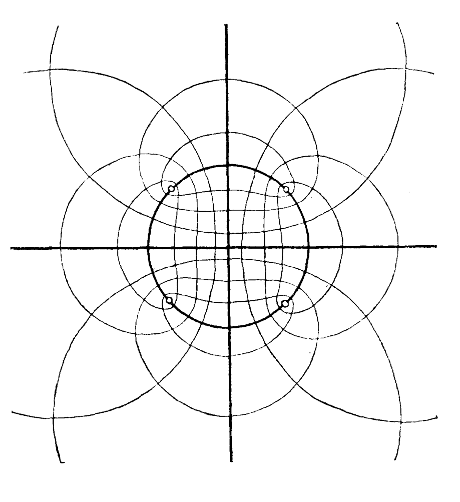


Fig. A″

Durch Rotation dieser Curvenschaaren um ihre Symmetrieaxen kommen wir zu den Systemen von Rotationscycliden**); und zwar durch Rotation der Curvenschaar A″ um die eine oder die andere Axe auf eine Cyclidenschaar I″ b); durch Drehung der Curvenschaar A′ aber kommen wir, je nachdem wir die eine oder die andere Axe als Rotationsaxe wählen, auf Cyclidensysteme I′ b_1) oder I′ b_2). Auf diese Flächensysteme werden wir später wieder zurückkommen.

Brennpunktes nicht einmal erklären, so geschieht dies, weil diese Punkte uns im Folgenden nur als Grenzpunkte der Curvenschaar interessiren werden. Wir hätten sogar das Wort „Brennpunkte“ vollständig vermeiden und nur von „Grenzpunkten“ reden können, haben es aber vorgezogen, die gebräuchlichere Benennung beizubehalten.



*) Im Falle A′) giebt es auch einen anderen symmetrischen Fall (vergl. die Fig.), welcher natürlich aus dem ersten durch reelle Inversion hervorgeht. Die Gestalt der hier gezeichneten Curvenschaar ist nur insofern eine specielle, als die Brennpunkte den Kreis, auf welchem sie liegen, in vier gleiche Theile theilen.

**) Aus der Curvenschaar der vorangehenden Bemerkung bekommen wir auch durch Rotation um die eine oder die andere Symmetrieaxe Cyclidenschaaren I′ b_1).

Hiermit haben wir aber erst diejenigen Schaaren cyclischer Curven in Betracht gezogen, welche zwei Symmetrieaxen besitzen. Aus ihnen

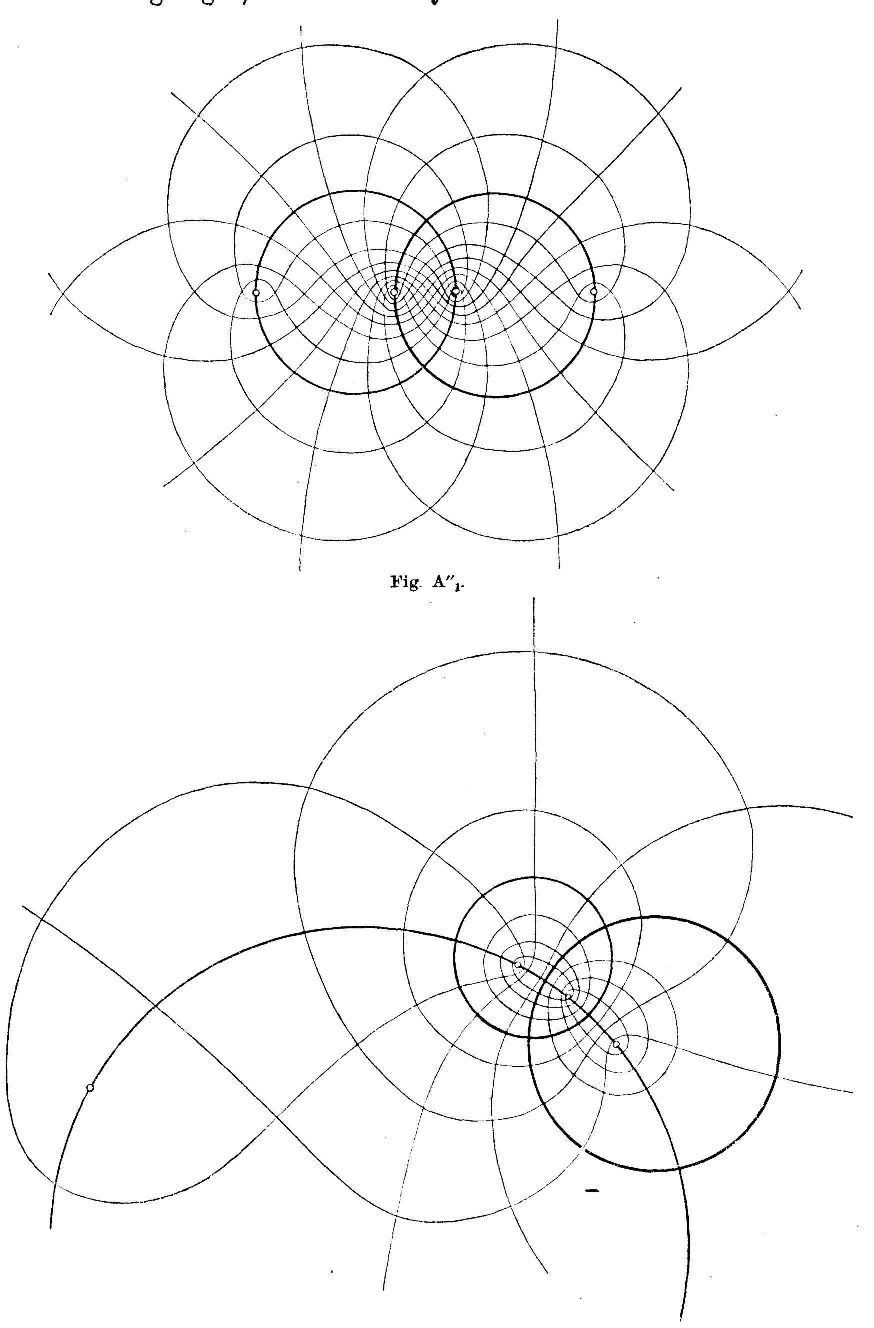


Fig. A''$_1$.

Fig. A'$_1$.

gehen natürlich die unsymmetrischen Curvenschaaren durch Inversion hervor. Wie die so entstehenden Curvenschaaren aussehen, kann man sich ohne grosse Mühe vorstellen. Als Beispiele geben wir vorstehende zwei Zeichnungen A_1'' einer noch nicht ganz unsymmetrischen Curvenschaar A'' *); und A'_1 einer ganz unsymmetrischen Curvenschaar A'.

Man bemerke hier insbesondere, wie sich die Curven immer um die Brennpunkte herum reihen.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen über die Verhältnisse in der Ebene gehen wir über zum Raume.

§ 2. Von der Gestalt der allgemeinen Systeme confocaler Cycliden.

Um die Gestalt der Flächenschaaren I'a) und I''a) anschaulich zu machen, fassen wir die Focalcurven **) ins Auge, welche sämmtlichen Flächen gemeinsam sind. Auf jeder Symmetriekugel e_i der Schaar wird eine solche Focalcurve durch die Cyclide $\lambda = e_i + \varepsilon$ (wo ε unendlich klein) ausgeschnitten. Die Focalcurven sind also cyclische***) Curven, aber es interessiren uns von ihnen nur solche, die auf eintheiligen Kugeln liegen, denn die anderen müssen offenbar selbst nulltheilig oder imaginär sein und können also auf die Gestalt der Schaar keinen Einfluss haben. Aber auch einige der eintheiligen Symmetriekugeln können nulltheilige Focalcurven tragen, und in der That ist dies der Fall bei zwei der eintheiligen Symmetriekugeln des Falles I'a). Auf den anderen zwei eintheiligen Symmetriekugeln dieses Falles aber sind die Focalcurven zweitheilig. Dagegen tragen alle drei reelle Symmetriekugeln des Falles I''a) eintheilige Focalcurven. Die Lage dieser Curven in den symmetrischen Fällen, wo drei Symmetrie*ebenen* vorhanden sind, wird schematisch durch folgende Figuren gezeigt †).

---

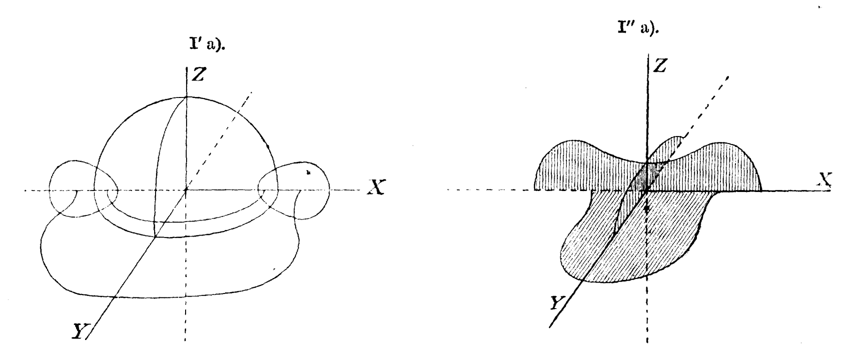
*) Die Figuren A'' und A''_1 sind beide insofern speciell, als die vier Brennpunkte auf einem Kreise (bezw. einer Geraden) liegen, was durchaus nicht der Fall zu sein braucht.

**) D. h. die Grenzcurven der Schaar. Man vergl. die zweite Anmerkung auf S. 72.

***) Welche sphärische Curven cyclische Curven genannt werden sollen, versteht sich in der Geometrie der reciproken Radien von selbst. Am einfachsten wird man wohl sagen: eine sphärische Curve heisst cyclisch, wenn ihre stereographische Projection auf eine Ebene eine cyclische Curve ist.

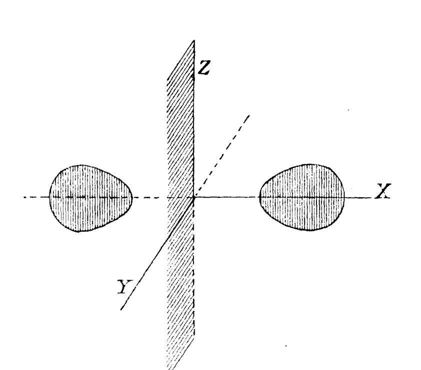
†) Ebenso wie bei den allgemeinen Curvenschaaren giebt es auch hier eine andere symmetrische Flächenschaar I'a); nur ist ihre Gestalt schwerer mit Worten zu beschreiben, als in dem im Texte zu Grunde gelegten Falle, da bei ihr eine zweitheilige Focalcurve (sphärischer Kegelschnitt) auf der Einheitskugel liegt.

In der ersten dieser Figuren sind die Focalcurven auf der Ebene ZY und auf der Einheitskugel um den Anfangspunkt (deren Schnitt mit den Coordinatenebenen gezeichnet ist) nulltheilig; und in beiden



Fällen liegen die Brennpunkte der Focalcurven in den Punkten, in welchen die Kugel, welche sie trägt, von den anderen Focalcurven durchdrungen wird.

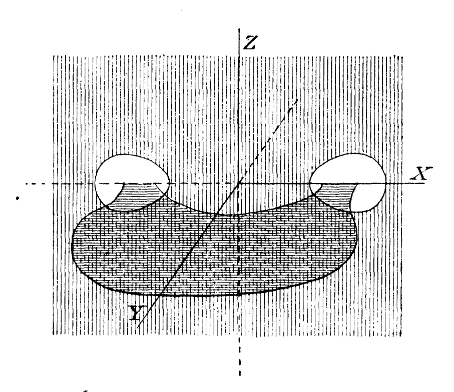
Wie reihen sich nun die Flächen μ, ν, ϱ der Schaar um diese Focalcurven herum? Diese Frage wollen wir zunächst für die Flächen μ des Falles I′a) beantworten. Diese μ-Schaar besteht, wie wir schon in der Tabelle oben constatirt haben, aus zweitheiligen Cycliden. Für Werthe von λ, welche im Intervalle μ liegen (d. h. im Intervalle $e_4 e_5$) und zwar dicht am Punkte e_4 heran, müssen die entsprechenden Cycliden nahezu mit Theilen der Kugel e_4 (d. h. der Ebene XZ) zusammenfallen, und die Umrisse dieser Theile der Kugel müssen nach dem früher Gesagten nahezu die Focalcurven sein, welche auf dieser Kugel liegen. Die Cycliden, welche solchen Werthen von μ entsprechen, bestehen also aus zwei sehr flachen Ovalen, welche die in der nebenstehenden Figur schraffirten



Theile der XZ-Ebene eng umschliessen. Wenn wir nun μ weiter von e_4 rücken lassen, dehnen sich diese zwei Ovale aus, während sie die vorangehenden Ovale (und folglich auch die schraffirten Theile der XZ-Ebene) immer umschliessen. Sie bleiben natürlich in Bezug auf die YZ-Ebene und auch in Bezug auf die Einheitskugel symmetrisch. Schliesslich, wenn μ sich dem Werthe e_5 nähert, werden die Ovale unendlich gross und fallen damit von beiden Seiten her in die

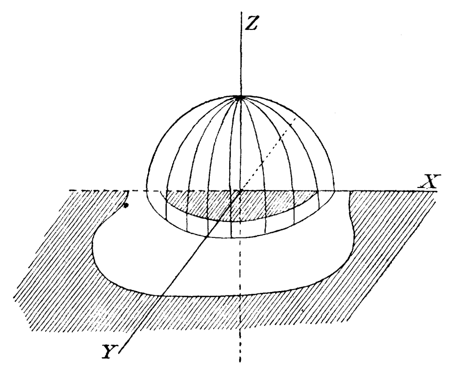
YZ-Ebene hinein. Dem Werthe $\mu = e_5$ entspricht diesmal die *ganze* doppeltzählende Kugel e_5, weil auf dieser nur eine nulltheilige Focalcurve liegt.

Ebenso wie die Cyclide $\mu = e_4$ (d. h. der Grenzfall der Cyclide λ, wenn λ sich dem Werthe e_4 von der Seite von e_5 her nähert) aus dem doppeltzählenden *Inneren* beider Theile der Focalcurve der XZ-Ebene besteht, so besteht die Cyclide $\nu = e_4$ (d. h. der Grenzfall der Cyclide λ, wenn λ sich dem Werthe e_4 von der Seite von e_3 her nähert) aus dem doppeltzählenden *Aeusseren* derselben Focalcurve, d. h. aus dem in der nebenstehenden Figur schraffirten Theile der XZ-Ebene. Die Cyclide $\nu = e_3$ andererseits besteht aus dem doppeltzählenden schraffirten Theile der XY-Ebene. Werthe von ν, welche nur sehr wenig von e_3 unterschieden sind, entsprechen also Cycliden, welche



dieses Stück der XY-Ebene eng umschliessen, d. h. welche aus einer flachen Ringfläche bestehen. Wenn wir nun ν sich von dem Punkte e_3 entfernen lassen, dehnen sich diese Ringflächen, indem sie immer die vorangehenden umschliessen. Sie bleiben aber, wo sie die XZ-Ebene durchdringen, immer schmal genug, um durch die in ihr liegenden in der Figur nicht schraffirten „Löcher" hindurch zu gehen. Indem sie sich übrigens ins Unendliche ausdehnen, fallen sie schliesslich von beiden Seiten her mit dem schraffirten Theile der XZ-Ebene zusammen, wie wir soeben sagten.

Jetzt bleibt noch die ϱ-Schaar zu discutiren. Hier entspricht der Parameterwerth $\varrho = e_3$ den zwei doppeltzählenden Stücken der XY-Ebene, welche in der nebenstehenden Figur schraffirt sind, während dem Werthe $\varrho = e_2$ die ganze doppeltzählende Einheitskugel entspricht. Die ϱ-Schaar selbst besteht aus lauter zweitheiligen Cycliden, deren einer



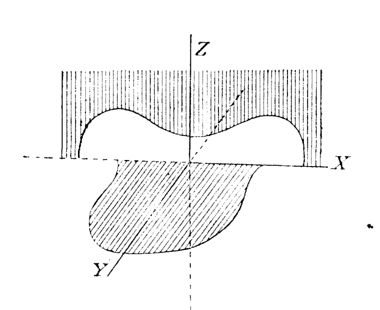
Theil das innere Oval der Focalcurve der XY-Ebene umgiebt, während der andere sich aus dem Aeusseren des äusseren Ovals entwickelt.

Indem sich ϱ vom Punkte e_3 nach dem Punkte e_2 bewegt, dehnt sich der erste Theil, während der zweite sich zusammenzieht, bis schliesslich die zwei Ovale in die doppeltzählende Einheitskugel zusammenfallen.

Hiermit haben wir uns ein Bild der drei Schaaren μ, ν, ϱ des Falles I'a) gemacht, und gehen nun kurz zum Falle I''a) über.

In diesem Falle sind nicht nur die drei reellen Symmetrieebenen mit ihren Focalcurven, sondern auch die drei Schaaren μ, ν, ϱ selbst völlig gleichberechtigt. Wir brauchen also nur eine derselben ins Auge zu fassen und können z. B. sagen:

Die μ-Schaar besteht aus eintheiligen Cycliden, welche sich um den schraffirten Theil der XY-Ebene herum legen, mit welchem sie doppeltzählend zusammenfallen, wenn $\mu = e_5$. Indem μ sich nun von e_5 bis e_4 bewegt, dehnen sich diese Ovale aus und fallen schliesslich mit dem doppeltzählenden schraffirten Theile der XZ-Ebene zusammen.



Mit den Schaaren ν und ϱ geht es mutatis mutandis ebenso. —

So viel über die symmetrischen Fälle. Was die unsymmetrischen Flächenschaaren I'a) und I''a) angeht, so können wir sie nicht gut durch Figuren anschaulich machen, da bei ihnen alle Focalcurven auf Kugeln und nicht auf Ebenen liegen. Wir müssen uns vielmehr so mit der Transformation durch reciproke Radien vertraut machen, dass wir uns ohne Weiteres aus den uns jetzt geläufigen symmetrischen Schaaren ein Bild der unsymmetrischen machen können. Hierzu übt man sich am besten bei zwei Dimensionen, wo man die Curven wirklich zeichnen kann (vergl. Figuren S. 74). Wir werden uns in den nächstfolgenden Paragraphen fast ausschliesslich mit den symmetrischen Fällen beschäftigen und es dem Leser überlassen, sich jedesmal ein zugehöriges Bild der unsymmetrischen zu verschaffen.

§ 3. **Geometrischer Grenzübergang von den Fällen** I a) **zu den Fällen** I b).

Wir haben schon Seite 73 gesehen, wie die Schaaren von Rotationscycliden I' b_1), I' b_2), I'' b) durch Drehung der allgemeinen Schaaren symmetrischer cyclischer Curven um ihre Symmetrieaxen erzeugt werden können; und was die Schaar I' b_3) angeht, so ist sie ein-

fach, wenn drei der Symmetriekugeln zu Ebenen gemacht werden, das System confocaler Kegel zweiten Grades, welches als bekannt vorausgesetzt werden darf. Es ist aber nicht ohne Interesse zu sehen, wie diese vier Flächensysteme I b) als Grenzfälle der Systeme I a) anzusehen sind. In diesem Paragraphen wollen wir Einiges hierüber sagen.

Um zunächst zu den Rotationsflächen I′b$_1$) überzugehen, fassen wir die Focalcurven des Falles I′a), wie sie durch die erste Figur Seite 76 dargestellt sind, ins Auge. Lassen wir dann aber die zwei Ovale der XZ-Ebene unendlich gross werden und in die Z-Axe, welche als Rotationsaxe erscheinen wird, von beiden Seiten her zusammenfallen; zugleich wird, wie man leicht sieht, die Focalcurve der XY-Ebene in zwei concentrische Kreise ausarten, welche symmetrisch in Bezug auf den Einheitskreis um den Nullpunkt dieser Ebene liegen. Wenn wir nun bedenken, dass die Cycliden der Schaar sich um diese Curven herum reihen müssen, so sehen wir leicht, wie die ν- und ϱ-Schaaren des allgemeinen Falles jetzt in Rotationsringcycliden bezw. zweitheilige Rotationscycliden übergehen können. Dagegen reihen sich die Curven der μ-Schaaren um die zwei Theile der Focalcurve der XZ-Ebene, welche jetzt in die Z-Axe zusammengefallen sind. Die zwei Schalen jeder Fläche der Schaar werden also längs dieser Axe zu einer Doppellinie zusammengepresst werden und müssen also in ein Ebenenpaar ausarten, dessen Kante in der Rotationsaxe Z liegt, und welches natürlich die Ebenen XZ und YZ als Symmetriebenen besitzt. *Statt der μ-Schaar haben wir also jetzt einen Büschel von Meridianebenen.* Wie dieser Büschel analytisch in dem verschwindenden Intervalle $e_4 e_5$ zu verfolgen ist, wird erst im nächsten Kapitel zu discutiren sein.

In ganz derselben Weise können wir den Uebergang von den Fällen I′a) und I″a) zu den Fällen I′b$_2$) und I″b) verfolgen. Beidemal arten die Focalcurven entweder in Stücke der Rotationsaxe aus, oder in Kreise, die um diese Axe herum gelegt sind. Wir werden dabei aus dem allgemeinen System nicht nur die zwei Schaaren von Rotationsflächen bekommen, sondern auch einen Büschel von Meridianebenen, welche die beiden Schaaren zum dreifachen Orthogonalsystem ergänzt. Hierbei wollen wir aber nicht länger verweilen.

Der Uebergang von dem Falle I′a) zum Falle I′b$_3$) ist aber nicht ganz so klar. Hier ist die Focalcurve der XZ-Ebene in zwei sich im Anfangspunkte schneidende zu den Axen X und Z symmetrisch gelegene Geraden ausgeartet. Dagegen sind die zwei Ovale der Focalcurve der XY-Ebene in zwei Punkte, nämlich den Anfangspunkt und den unendlich fernen Punkt, übergegangen. Auf Grund dieser Angaben ist es ganz klar, wie die Flächenschaaren μ und ν des Falles

I′a) in Schaaren confocaler Kegel übergehen, welche sich um die Focallinien der XZ-Ebene herumreihen. Nun entnehmen wir aber unserer Tabelle ferner, dass die Flächen der ϱ-Schaar jetzt nulltheilig geworden sind, oder genauer gesagt, dass sie zu nulltheiligen Kegeln zweiten Grades geworden sind, mit zwei reellen Doppelpunkten, die im Null- und Unendlichkeitspunkte liegen. Wir sollten vielmehr aus der geometrischen Anschauung erwarten, dass diese ϱ-Schaar in eine Schaar concentrischer Kugelpaare übergehen würde und in der That, wenn wir den Grenzübergang analytisch verfolgen, sehen wir, dass dies gewissermassen der Fall ist. Die Sache ist folgende. Für alle Werthe von λ, welche im Intervalle $e_2 e_3$ liegen und eine endliche Entfernung vom Punkte e_2 haben, besteht die Cyclide aus einem unendlich kleinen und einem unendlich grossen Oval, während die Kugeln der Schaar mit endlichem Radius Werthen von λ entsprechen, welche in unendlich kleiner Entfernung vom Punkte e_2 zusammengehäuft sind. In der Grenze also besteht der reelle Theil aller Flächen des Intervalles $e_2 e_3$ bloss aus den Anfangs- und Unendlichkeitspunkten, während die Schaar ϱ der concentrischen Kugeln durch Hülfsgrenzübergang in der Nähe des Punktes e_2 zu suchen ist. Dass wir den Buchstaben ϱ in der Tabelle auch in diesem Schema *zwischen* die Striche e_1 und e_2 gesetzt haben, ist nur der Einfachheit halber geschehen; die Schaar ist eigentlich unmittelbar ausserhalb dieses verschwindenden Intervalles zu suchen*), wie wir im nächsten Kapitel näher ausführen werden.

Schliesslich haben wir noch zu bemerken:

Der Fall I′ b_3) kann ebensogut als Grenzfall von I″a) als von I′a) angesehen werden, indem wir die conjugirt imaginären Grössen e_1 und e_2 des Falles I″a) auf der reellen Axe zusammenfallen lassen.

Auf die Begründung dieser Behauptung gehen wir erst im nächsten Kapitel ein. Wir wollen hier nur angeben, wie der geometrische Grenzübergang zu machen ist.

Wenn z. B. e_1 und e_2 in einen Punkt des Intervalles ϱ des Falles I″a) zusammenfallen, so wird die Focalcurve der YZ-Ebene (vergl. S. 76) zum Nullpunkte zusammenschrumpfen, während die Focalcurve der XY-Ebene sich zum unendlich fernen Punkte dehnt. Dagegen artet die Focalcurve der XZ-Ebene in ein Paar Geraden aus, welche durch den Nullpunkt hindurchgehen und symmetrisch in Bezug auf die X und Z-Axen liegen. Es reihen sich nun die μ- und ν-Schaaren, wie leicht zu sehen ist, um diese Geraden als Kegel zweiten Grades

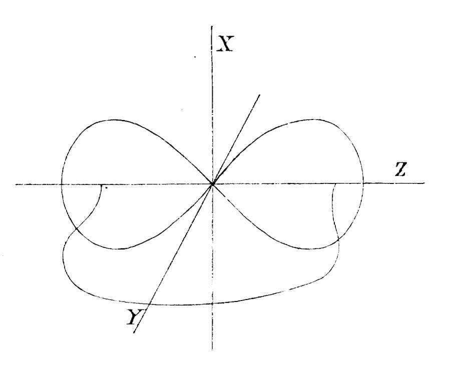
*) Aehnliches gilt natürlich auch für die Fälle I′c_2) und I′d_2).

herum. Dagegen artet die ϱ-Schaar in concentrische Kugeln aus, welche aber, sofern sie einen endlichen Radius besitzen, Werthen von λ entsprechen, welche unendlich nahe an den Punkt $e_1 = e_2$ heranliegen. Diese Kugeln werden auch (bei Beschränkung auf das Reelle) nicht paarweise zusammengehören, denn sie erscheinen jetzt als Grenzfälle eintheiliger Cycliden.

§ 4. Ueber die Cyclidensysteme II a), II b), III a), III b).

Das einfachste Cyclidensystem II a) ist, wie in der Tabelle constatirt ist, das wohlbekannte System der confocalen Flächen zweiten Grades. Die Gestalt dieses dreifach orthogonalen Systems wollen wir als bekannt voraussetzen. Bei ihm sind die Focalcurven, welche nicht nulltheilig sind, in eine Ellipse und eine Hyperbel ausgeartet.

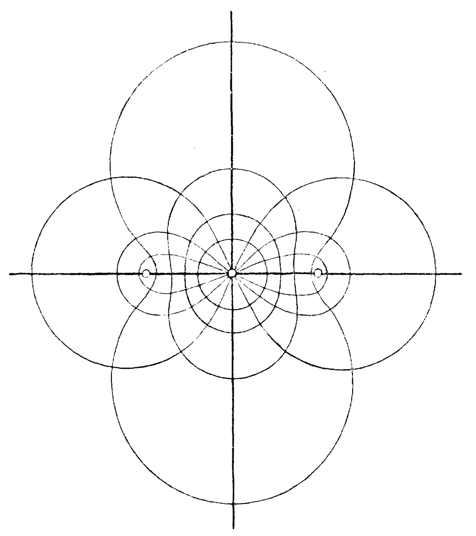
In dieser einfachen Schaar ist aber gewissermassen das Wesentliche des Falles II a) verborgen, indem der Doppelpunkt, welcher allen Flächen der Schaar gemeinsam ist, hier im Unendlichen liegt. Wir wollen also diese Flächenschaar in Bezug auf die Einheitskugel invertiren, welche Operation den Unendlichkeitspunkt mit dem Nullpunkte vertauscht, während übrigens die Flächen der Schaar ebenso symmetrisch bleiben wie vorher. Dann nehmen die Focalcurven die nebenstehende Gestalt an, wo die eine einen gewöhnlichen, die andere einen isolirten Doppelpunkt im Nullpunkte besitzt. Wie diese Focalcurven aus denjenigen des Falles I′a) oder aber I″a) continuirlich entstehen, ist ohne Weiteres klar *). Es kann also keine Schwierigkeit darbieten, die Gestalt der Flächenschaaren selbst durch Grenzübergang aus der Gestalt der auf Seiten 76—78 beschriebenen Flächenschaaren abzuleiten. Die Durchführung dieses Grenzüberganges ins Einzelne überlassen wir dem Leser.



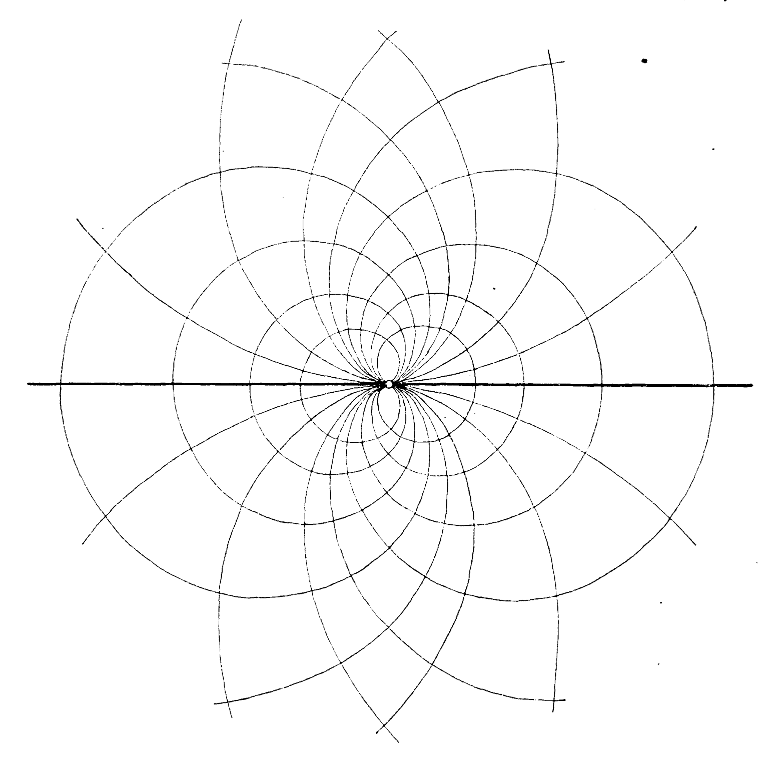
Die entsprechende zweidimensionale Curvenschaar, welche natürlich durch Inversion vom Mittelpunkte aus aus der Schaar confocaler

*) Nur könnten wir beim Grenzübergang vom Falle I″a) das Vorhandensein des isolirten Doppelpunktes der einen Curve nicht ohne Weiteres einsehen, da er aus imaginären Theilen der Focalcurve des allgemeinen Falles entsteht.

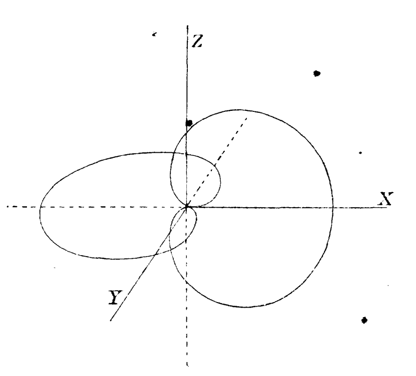
Kegelschnitte hervorgeht, ist in der nebenstehenden Figur abgebildet. Alle Curven der einen Art haben im Anfangspunkte einen gewöhnlichen, die der anderen Art einen isolirten Doppelpunkt. Durch Drehung dieser Schaar um die Symmetrieaxen bekommen wir symmetrische Schaaren von Rotationsflächen II b_1) und II b_2), welche die Inversen der confocalen Rotationsellipsoide und -hyperboloide sind.



Im Falle III a) haben wir, indem wir den biplanaren Punkt, welchen alle Flächen gemeinsam haben, ins Unendliche werfen, das bekannte System confocaler Paraboloide, wo die nicht nulltheiligen Focalcurven aus zwei Parabeln bestehen. Das entsprechende zweidimensionale System besteht natürlich aus zwei Schaaren confocaler Parabeln oder, indem



wir diese von dem Nullpunkte aus invertiren (um den Unendlichkeitspunkt, wo in der Geometrie der reciproken Radien jede Parabel eine Spitze besitzt, zum Nullpunkte zu machen) aus einer Schaar Cardioiden mit gemeinsamer Spitze (vergl. die zweite Fig. Seite 82). Durch Rotation dieser Curvenschaar um ihre Symmetrieaxe bekommen wir ein Flächensystem IIIb); dieses Flächensystem ist das Inverse der Schaar confocaler Rotationsparaboloide, deren gemeinsamer Brennpunkt als Transformationsmittelpunkt gewählt ist. Aus der Gestalt dieser Rotationsflächen können wir mit Leichtigkeit die allgemeine Gestalt von zwei der Flächenschaaren IIIa) ableiten, wenn der biplanare Punkt im Nullpunkte liegt. Dann bestehen die Focalcurven, sofern sie nicht nulltheilig sind, aus zwei Cardioiden, die eine in der XZ- die andere in der XY-Ebene, wie in der nebenstehenden Figur abgebildet, und die zwei Flächenschaaren ϱ und ν reihen sich um das Innere dieser Cardioiden herum, indem jede von ihnen im Anfangspunkte einen biplanaren Punkt von ähnlicher Gestalt wie bei den Rotationsflächen III b) besitzt. Dagegen besitzen alle Flächen der μ-Schaar im Anfangspunkte einen biplanaren Punkt mit *reellen* Tangentenebenen*). Die Flächen dieser Schaar entwickeln sich aus dem doppeltüberdeckten Aeusseren der einen Cardioide, dehnen sich, und fallen schliesslich mit dem doppeltüberdeckten Aeusseren der anderen Cardioide zusammen.



§ 5. **Die übrigen Cyclidenschaaren.**

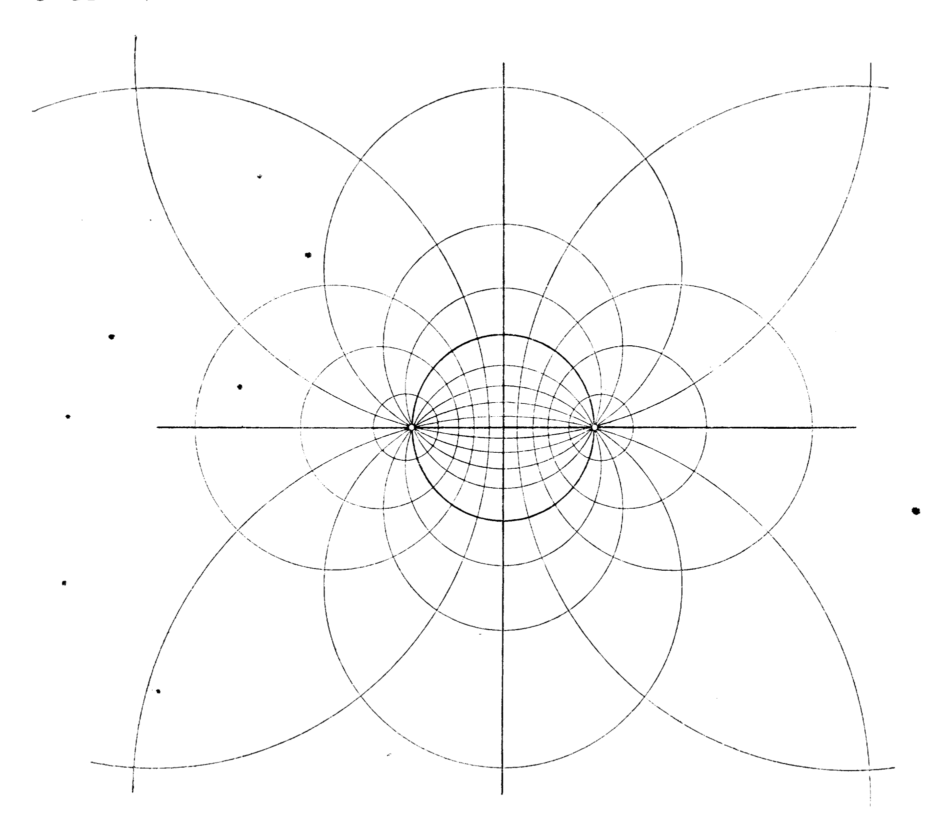
In den vorangehenden Paragraphen haben wir sämmtliche Fälle a) und b) discutirt. Die Fälle I e), I f), II g) kommen für uns nicht in Betracht; denn, wie wir wissen, sind bei ihnen keine Flächenschaaren mehr vorhanden. Wir könnten allerdings den geometrischen Grenzübergang von allgemeineren Fällen verfolgen und sehen, wie die drei Flächenschaaren jetzt in unendlich kleinen Intervallen der λ-Axe

---

*) Wegen der Gestalt eines solchen Punktes vergl. die Abhandlung von Klein: „Ueber Flächen dritter Ordnung“, Math. Ann. Bd. 6, S. 557.

zu suchen sind. Auf diese Ueberlegungen wollen wir aber nicht eingehen.

Nun lassen sich noch die Fälle I c), II c), II f), III d) zusammengruppiren, da wir es bei jedem von ihnen mit einem Kugelbüschel zu

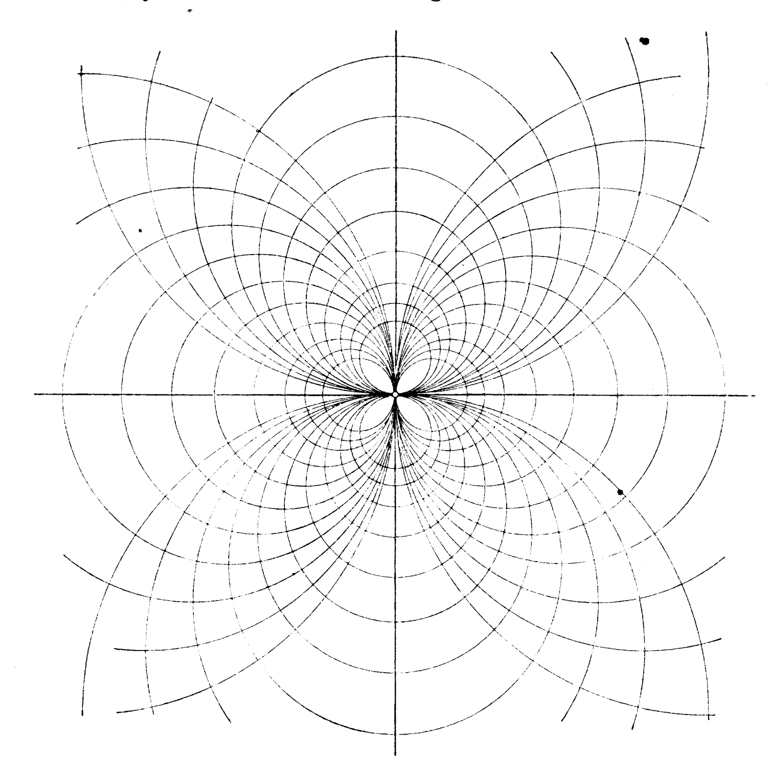


thun haben. Diese Fälle sind aber schon durch die Tabelle genügend beschrieben.

Es sind also nur noch die Fälle I d), II d), II e), III c) zu discutiren.

Fassen wir zunächst das zweidimensionale Orthogonalsystem der vorstehenden Figur ins Auge, welches aus zwei Kreisbüscheln besteht. Durch Drehung dieser Curven um die eine Symmetrieaxe bekommen wir ein Cyclidensystem $I' d_1$); durch Rotation um die andere Axe ein Cyclidensystem $I' d_2$). Beidemal ist das Cyclidensystem mit einem Kugelbüschel verbunden, welcher, ebenso wie die noch hinzuzufügenden Meridianebenen, analytisch erst durch Hülfsgrenzübergang zu bekommen sind. Die allgemeinen Flächenschaaren $I' d_1$) und $I' d_2$) gehen natürlich aus diesen Schaaren von Rotationsflächen durch un-

symmetrische Inversion hervor; die Flächen des Falles $I' d_2$) werden insbesondere zu Rotationskegeln, wenn der eine reelle Doppelpunkt der Rotationscycliden ins Unendliche geworfen wird.



Die Flächenschaar II e) kann als derjenige Grenzfall dieser zwei Flächenschaaren angesehen werden, in welchem zwei ihrer Doppelpunkte zusammenfallen. Sie entsteht durch Rotation des vorstehend abgebildeten Kreisbüschels, bei welchem im Gegensatz zu der vorigen Figur die Basispunkte zusammengefallen sind. Jede Fläche hat hier einen speciellen biplanaren Punkt im Nullpunkte, und wenn dieser Punkt ins Unendliche geworfen wird, bekommen wir das System coaxialer Rotationscylinder.

Um uns schliesslich ein Bild der Flächenschaaren II d) und III c) zu verschaffen, wenn der biplanare bezw. uniplanare Punkt, welcher allen Flächen gemeinsam ist, nicht im Unendlichen liegt (in welchem Falle wir es mit confocalen elliptischen und hyperbolischen, bezw. parabolischen Cylindern zu thun haben), können wir folgendermassen verfahren. Wir legen die Schaaren von cyclischen Curven mit einem Doppelpunkt bezw. Spitze (Seite 82) zu Grunde, und denken uns

jetzt jede Curve der Schaar von dem Endpunkte eines Radiusvectors beschrieben, der sich um den Anfangspunkt herumdreht. Ueber diesem Radiusvector als Durchmesser construiren wir ferner einen Kreis senkrecht zur Ebene der Curvenschaar. Dann erzeugen diese Kreise, welche bei der Drehung des Radiusvectors natürlich ihre Grössen ändern, eine Flächenschaar II d) bezw. III c), bei welcher der biplanare bezw. uniplanare Punkt im Nullpunkte liegt. Aus diesen Schaaren entstehen dann durch unsymmetrische Inversion die allgemeinen Schaaren II d) und III c).

Hiermit ist die Gestalt sämmtlicher Cyclidenschaaren beschrieben.

Kapitel 5.

Einführung krummliniger Coordinaten.

§ 1. Ueber die cyclidischen Coordinaten I a), II a), III a).

Denken wir uns eine Cyclidenschaar I′a) oder I″a) zu Grunde gelegt, so gehen durch jeden Raumpunkt drei Flächen der Schaar. In der That ist die Gleichung der Schaar: $\sum_1^5 \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$ als Gleichung in λ betrachtet vom dritten Grade, denn der Coefficient von λ^4, welcher Term beim Herausmultipliciren scheinbar hervorkommt, verschwindet wegen der Identität $\Omega = 0$. Wir werden die drei Wurzeln dieser cubischen Gleichung, d. h. die Parameterwerthe, welche den drei Flächen entsprechen, die durch den Punkt hindurchgehen, als *cyclidische Coordinaten des Raumpunktes* ansehen.

Nun sehen wir überdies aus den Entwickelungen des vorigen Kapitels, dass durch jeden *reellen* Raumpunkt drei reelle, nicht nulltheilige Flächen der Schaar hindurchgehen, und zwar so, dass von den entsprechenden Parameterwerthen je einer in dem Intervalle μ, ν, ϱ liegt. Dementsprechend werden wir die cyclidischen Coordinaten eines reellen Raumpunktes mit den Buchstaben μ, ν, ϱ bezeichnen.

Diese drei Coordinaten sind, wie wir soeben bemerkten, die Wurzeln einer cubischen Gleichung und liessen sich also vermittelst gewisser Irrationalitäten durch die Coefficienten derselben (also durch die x_i und die e_i) ausdrücken. Hierdurch bekämen wir dann Formeln, welche uns den Uebergang von pentasphärischen zu cyclidischen Coordinaten gestatteten.

Es wird sich aber vortheilhafter erweisen, diese Formeln in der umgekehrten Gestalt zu besitzen, in welcher die pentasphärischen Coordinaten mittelst der krummlinigen Coordinaten ausgedrückt sind. Wir haben also jetzt für $x_1 \, . \, . \, x_5$ Ausdrücke in μ, ν, ϱ zu finden, welche den Gleichungen genügen:

$$\sum_1^5 {}^i x_i^2 = 0, \quad \sum_1^5 {}^i \frac{x_i^2}{\mu - e_i} = 0, \quad \sum_1^5 {}^i \frac{x_i^2}{\nu - e_i} = 0, \quad \sum_1^5 {}^i \frac{x_i^2}{\varrho - e_i} = 0.$$

Diese Gleichungen sind in den x_i^2 linear und lassen sich ohne Mühe durch Determinanten auflösen. Noch einfacher aber verfährt man nach einer von Jacobi angewandten Methode. Setzen wir nämlich:

$$f(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)(\lambda - e_4)(\lambda - e_5),$$
$$\varphi(\lambda) = (\mu - \lambda)(\nu - \lambda)(\varrho - \lambda),$$

so besteht offenbar folgende Identität:

$$\sum_1^5 {}^i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = \left(- \sum_1^5 {}^i e_i x_i^2 \right) \frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)},$$

denn sowohl der Ausdruck linker Hand, wie auch der Ausdruck rechter Hand verschwindet für $\lambda = \mu, \nu, \varrho$. Durch Partialbruchzerlegung bekommen wir:

$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)} = \sum_1^5 {}^i \frac{\varphi(e_i)}{f'(e_i) \cdot (\lambda - e_i)},$$

woraus wir durch Vergleichung mit der soeben angeführten Identität die gewünschten Formeln bekommen. *Wir erhalten so:*

$$\sigma x_i^2 = \frac{\varphi(e_i)}{f'(e_i)},$$

$$\textit{wo } \sigma = - \frac{1}{\Sigma e_i x_i^2}.$$

Jetzt wollen wir noch den Ausdruck für das Bogenelement in cyclidischen Coordinaten finden. Differentiiren wir die Formeln für σx_i^2 logarithmisch, so bekommen wir:

$$2 dx_i = \frac{x_i d\mu}{\mu - e_i} + \frac{x_i d\nu}{\nu - e_i} + \frac{x_i d\varrho}{\varrho - e_i} - \frac{x_i d\sigma}{\sigma}.$$

Indem wir diese Gleichungen (für $i = 1, 2, . . 5$) quadriren und addiren, bekommen wir linker Hand $4 \sum_1^5 {}^i dx_i^2$; rechter Hand bekommen wir ein Aggregat von Termen zweierlei Art: erstens Terme,

welche das Product zweier Differentiale enthalten und zweitens Terme, welche das Quadrat der einzelnen Differentiale enthalten. Nun verschwinden aber sämmtliche Terme erster Art, denn es ist z. B. der Coefficient von $d\mu \cdot d\nu$ gleich:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{2x_i^2}{(\mu - e_i)(\nu - e_i)} = \frac{2}{\nu - \mu} \sum_1^5 {}_i \left(\frac{x_i^2}{\mu - e_i} - \frac{x_i^2}{\nu - e_i} \right) = 0,$$

während der Coefficient von $d\mu \cdot d\sigma$ unmittelbar gleich Null ist:

$$-\sum_1^5 {}_i \frac{2x_i^2}{\sigma(\mu - e_i)} = \frac{-2}{\sigma} \sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\mu - e_i} = 0.$$

Ferner verschwindet auch das Glied in $d\sigma^2$, da dasselbe einfach gleich $\frac{d\sigma^2}{\sigma^2} \sum_1^5 {}_i x_i^2$ ist. Wir haben also rechter Hand nur noch drei Terme, welche bezw. $d\mu^2$, $d\nu^2$, $d\varrho^2$ enthalten*), und diese Terme wollen wir jetzt berechnen.

Der Coefficient von $d\mu^2$ ist $\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{(\mu - e_i)^2}$, ein Ausdruck, in welchem aber noch die pentasphärischen Coordinaten x_i vorkommen.

Fassen wir jetzt wieder die oben aufgestellte Identität ins Auge:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = \frac{-\varphi(\lambda)}{\sigma \cdot f(\lambda)},$$

und differentiiren diese Gleichung nach λ, so bekommen wir:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{(\lambda - e_i)^2} = \frac{-\varphi'(\lambda)}{\sigma \cdot f(\lambda)} + \frac{\varphi(\lambda) \cdot f'(\lambda)}{\sigma \cdot (f(\lambda))^2},$$

woraus wir schliesslich erhalten, wenn wir noch $\lambda = \mu$ setzen:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{(\mu - e_i)^2} = \frac{-\varphi'(\mu)}{\sigma \cdot f(\mu)} = \frac{(\mu - \nu)(\mu - \varrho)}{\sigma \cdot f(\mu)}.$$

Die Coefficienten von $d\nu^2$, $d\varrho^2$ bekommen wir hieraus durch cyclische Vertauschung der Buchstaben μ, ν, ϱ, und haben als Resultat dieser Rechnung:

---

*) Hiermit ist nachträglich der Beweis geliefert, dass das Cyclidensystem wirklich ein Orthogonalsystem ist.

$$4\sum_1^5{}_i\, dx_i^2 = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{(\mu-\nu)(\mu-\varrho)}{f(\mu)}\,d\mu^2 + \frac{(\nu-\mu)(\nu-\varrho)}{f(\nu)}\,d\nu^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{f(\varrho)}\,d\varrho^2\right].$$

Hiermit erhalten wir (vergl. S. 48) als Ausdruck des Bogenelementes ds in cyclidischen Coordinaten:

$$ds^2 = \frac{-\sum_1^5{}_i\, e_i x_i^2}{4\left(\sum_1^5{}_i\, \frac{x_i}{R_i}\right)^2}\left[\frac{(\mu-\nu)(\mu-\varrho)}{f(\mu)}\,d\mu^2 + \frac{(\nu-\mu)(\nu-\varrho)}{f(\nu)}\,d\nu^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{f(\varrho)}\,d\varrho^2\right].$$

Anstatt eines Cyclidensystems I a) können wir ebenso gut ein Cyclidensystem II a) oder III a) zu Grunde legen. In der That: die Gleichungen dieser Flächenschaaren sind ebenfalls vom dritten Grade in λ, und wir können daher auch die drei Wurzeln dieser Gleichung als krummlinige Coordinaten des Raumes ansehen. Ferner sehen wir aus den Betrachtungen des vorigen Kapitels, dass diese drei Coordinaten für reelle Raumpunkte reell und mit den Buchstaben μ, ν, ϱ zu bezeichnen sind.

Nun werden wir natürlich Formeln haben wollen, welche die zu den Fällen II a) und III a) gehörigen kanonischen Coordinaten durch diese krummlinigen Coordinaten ausdrücken. Solche Formeln sind die folgenden:

$$\text{II a)}\begin{cases}
\sigma x_1^2 = -\dfrac{(\mu-e_1)(\nu-e_1)(\varrho-e_1)}{(e_3-e_1)(e_4-e_1)(e_5-e_1)}, \\[2ex]
\sigma(2x_1x_2) = \dfrac{-\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\mu-e_1)(\nu-e_1)(\varrho-e_1)}{(e_3-e_1)(e_4-e_1)(e_5-e_1)}\right], \\[2ex]
\sigma x_3^2 = \dfrac{(\mu-e_3)(\nu-e_3)(\varrho-e_3)}{(e_1-e_3)^2(e_4-e_3)(e_5-e_3)}, \\[2ex]
\sigma x_4^2 = \dfrac{(\mu-e_4)(\nu-e_4)(\varrho-e_4)}{(e_1-e_4)^2(e_3-e_4)(e_5-e_4)}, \\[2ex]
\sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu-e_5)(\nu-e_5)(\varrho-e_5)}{(e_1-e_5)^2(e_3-e_5)(e_4-e_5)}, \\[2ex]
-\dfrac{1}{\sigma} = e_1(2x_1x_2) + x_1^2 + e_3x_3^2 + e_4x_4^2 + e_5x_5^2.
\end{cases}$$

$$
\text{III a)} \begin{cases}
\sigma x_1^2 = \dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)}, \\[2ex]
\sigma(2x_1x_2) = \dfrac{\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)}\right], \\[2ex]
\sigma(2x_1x_3 + x_2^2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial e_1^2}\left[\dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)}\right], \\[2ex]
\sigma x_4^2 = \dfrac{(\mu - e_4)(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)^3(e_5 - e_4)}, \\[2ex]
\sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu - e_5)(\nu - e_5)(\varrho - e_5)}{(e_1 - e_5)^3(e_4 - e_5)}, \\[2ex]
-\dfrac{1}{\sigma} = e_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2x_1x_2 + e_4x_4^2 + e_5x_5^2.
\end{cases}
$$

Diese Formeln können wir entweder geradeso begründen wie die entsprechenden Formeln des Falles I a), oder wir können sie aus diesen letzten Formeln durch die Grenzübergänge von Seiten 57—58 ableiten.

§ 2. Ueber diejenigen Ausartungen der krummlinigen Coordinatensysteme I a), II a), III a), bei welchen Doppelwurzeln (11) auftreten.

Wir denken uns ein Cyclidensystem I′a), welches ein cyclidisches Coordinatensystem definirt und lassen diese Flächen wie in I, 4, § 3 in Rotationscycliden des Falles I′ b_1) und Meridianebenen ausarten*). Auch in diesem Orthogonalsystem gehen durch jeden reellen Raumpunkt drei reelle Flächen, und es liegt der Gedanke nahe, auch hier ein entsprechendes System krummliniger Coordinaten aufzustellen. Was die zwei Schaaren Rotationscycliden angeht, so bietet dies keine Schwierigkeit; denn die Gleichung der Schaar ist jetzt vom zweiten Grade in λ und ihre zwei Wurzeln, die wir für reelle Punkte natürlich durch ν und ϱ bezeichnen, sind ohne Weiteres als zwei krummlinige Coordinaten einzuführen. Alle Parameterwerthe μ aber, welche zu der dritten Schaar gehören, sind jetzt in einem einzigen Punkte e_4 zusammengehäuft und können also nicht ohne Weiteres als Coordinaten gebraucht werden. Um diesen Uebelstand zu vermeiden setzen wir, ehe wir zur Grenze übergehen:

$$e_5 = e_4 + \varepsilon, \qquad \mu = e_4 + \varepsilon\mu',$$

*) Wir brauchen hier, wie überhaupt öfter in der folgenden Darstellung, gewisse einfache Bezeichnungsweisen für complicirtere Gebilde, welche durch reelle Kreisverwandtschaft aus den einfachen hervorgehen. So z. B. Meridianebenen für Kugelbüschel mit eintheiligem Grundkreis.

wobei, wenn μ im Intervalle $e_4 e_5$ liegen soll, $0 < \mu' < 1$ sein muss. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung Ia) der μ-Schaar ein, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{x_1^2}{e_4 + \varepsilon\mu' - e_1} + \frac{x_2^2}{e_4 + \varepsilon\mu' - e_2} + \frac{x_3^2}{e_4 + \varepsilon\mu' - e_3} + \frac{x_4^2}{\varepsilon\mu'} + \frac{x_5^2}{\varepsilon(\mu' - 1)} = 0.$$

Lassen wir nun ε gegen Null convergiren, so bekommen wir die Gleichung:

$$\frac{x_4^2}{\mu'} + \frac{x_5^2}{\mu' - 1} = 0,$$

was offenbar die Gleichung eines Büschels von Kugelpaaren ist, an welchem die Kugeln x_4 und x_5 beide doppeltzählend Theil nehmen, sodass der Büschel wirklich einen eintheiligen Grundkreis besitzt, wie dies der Fall sein sollte. *Die hiermit eingeführte Variable μ' ist natürlich als dritte krummlinige Coordinate zu betrachten.* Führen wir nun diese neue Coordinate auch in die Formeln von Seite 87 ein, so gehen diese in folgende über:

$$\text{I}'\,\text{b}_1)\left\{\begin{aligned}
\sigma x_1^2 &= \frac{(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)},\\
\sigma x_2^2 &= \frac{(\nu - e_2)(\varrho - e_2)}{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)(e_4 - e_2)},\\
\sigma x_3^2 &= \frac{(\nu - e_3)(\varrho - e_3)}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)(e_4 - e_3)},\\
\sigma x_4^2 &= \frac{(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_2 - e_4)(e_3 - e_4)}\cdot\mu',\\
\sigma x_5^2 &= \frac{(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_2 - e_4)(e_3 - e_4)}\cdot(1 - \mu').
\end{aligned}\right.$$

In ganz entsprechender Weise und mit ganz ähnlichem Resultat verfahren wir bei den anderen Rotationsflächen I′ b_2) und I″ b). Dagegen im Falle I′ b_3) gestaltet sich die Sache ein wenig anders. Dort entsprechen den Parameterwerthen μ und ν zwei Schaaren confocaler Kegel zweiten Grades. Um die dritte Flächenschaar, welche offenbar aus concentrischen Kugeln besteht, zu bekommen, machen wir im Falle I′ a) den Grenzübergang:

$$e_2 = e_1 + \varepsilon, \quad \varrho = e_1 + \varepsilon\varrho'.$$

Hierdurch kommen wir zu dem Büschel von Kugelpaaren:

$$\frac{x_1^2}{\varrho'} + \frac{x_2^2}{\varrho' - 1} = 0.$$

Da x_1 eine nulltheilige Kugel ist, andererseits aber doppeltzählend an dem Büschel Theil nimmt, so muss der Grundkreis des Büschels

nulltheilig sein, wie dies der Fall sein sollte. Nun sehen wir aber ferner, dass die eintheiligen Kugeln dieses Büschels den Parameterwerthen $\varrho' > 1$ entsprechen, und wir haben also diese Werthe als dritte Coordinate einzuführen. Hieraus sehen wir, wie schon Seite 80 in Aussicht gestellt wurde, dass die ϱ-Schaar des Falles I′a) beim Uebergang zum Falle I′b_3) nicht wie bei den anderen Fällen Ib) *zwischen* den zusammenfallenden Wurzeln, sondern unmittelbar *ausserhalb* dieses verschwindenden Intervalles zu suchen ist.

Für die soeben behandelten Fälle Ib) bekommen wir folgende Formeln:

$$\text{I}'\,b_2)\ \text{und}\ \text{I}''\,b)\ \begin{cases} \sigma x_1^2 = \dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)(e_5 - e_1)}, \\[2ex] \sigma x_2^2 = \dfrac{(\mu - e_2)(\varrho - e_2)}{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)(e_5 - e_2)}, \\[2ex] \sigma x_3^2 = \dfrac{(\mu - e_3)(\varrho - e_3)}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)(e_5 - e_3)} \cdot \nu', \\[2ex] \sigma x_4^2 = \dfrac{(\mu - e_3)(\varrho - e_3)}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)(e_5 - e_3)} \cdot (1 - \nu'), \\[2ex] \sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu - e_5)(\varrho - e_5)}{(e_1 - e_5)(e_2 - e_5)(e_3 - e_5)}; \end{cases}$$

$$\text{I}'\,b_3)\ \begin{cases} \sigma x_1^2 = \dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)} \cdot \varrho', \\[2ex] \sigma x_2^2 = \dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)} \cdot (1 - \varrho'), \\[2ex] \sigma x_3^2 = \dfrac{(\mu - e_3)(\nu - e_3)}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_3)(e_5 - e_3)}, \\[2ex] \sigma x_4^2 = \dfrac{(\mu - e_4)(\nu - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_4)(e_5 - e_4)}, \\[2ex] \sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu - e_5)(\nu - e_5)}{(e_1 - e_5)(e_3 - e_5)(e_4 - e_5)}. \end{cases}$$

In diesem Paragraphen haben wir in der Kategorie I noch die Fälle d_1) und d_2) zu betrachten. In beiden Fällen ist zunächst nur eine eigentliche Flächenschaar vorhanden, deren Parameter von uns natürlich als krummlinige Coordinate benutzt werden wird. Die zwei anderen Coordinaten sind durch Grenzübergang vom Falle I′a) einzuführen. Dies geschieht in ganz ähnlicher Weise wie bei den Fällen Ib), indem wir in der Nähe von jeder Doppelwurzel zu einem ergänzenden Kugelbüschel übergehen. Wir bekommen dann folgende Formeln:

$$\mathrm{I'd_1})\begin{cases}\sigma x_1^2 = \dfrac{\nu - e_1}{(e_2 - e_1)(e_4 - e_1)}, \\ \sigma x_2^2 = \dfrac{\nu - e_2}{(e_1 - e_2)(e_4 - e_2)} \cdot \varrho', \\ \sigma x_3^2 = \dfrac{\nu - e_2}{(e_1 - e_2)(e_4 - e_2)} \cdot (1 - \varrho'), \\ \sigma x_4^2 = \dfrac{\nu - e_4}{(e_1 - e_4)(e_2 - e_4)} \cdot \mu', \\ \sigma x_5^2 = \dfrac{\nu - e_4}{(e_1 - e_4)(e_2 - e_4)} \cdot (1 - \mu'); \end{cases}$$

$$\mathrm{I'd_2})\begin{cases}\sigma x_1^2 = \dfrac{\nu - e_1}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)} \cdot \varrho', \\ \sigma x_2^2 = \dfrac{\nu - e_1}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)} \cdot (1 - \varrho'), \\ \sigma x_3^2 = \dfrac{\nu - e_3}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_3)}, \\ \sigma x_4^2 = \dfrac{\nu - e_4}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_4)} \cdot \mu', \\ \sigma x_5^2 = \dfrac{\nu - e_4}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_4)} \cdot (1 - \mu'). \end{cases}$$

Auf ganz ähnlichem Wege sind die ergänzenden Coordinaten in den Fällen IIb) und IIIb) einzuführen. Wir geben nur die Formeln an:

$$\mathrm{II\,b_1})\begin{cases}\sigma x_1^2 = -\dfrac{(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)}, \\ \sigma(2x_1x_2) = \dfrac{-\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)}\right], \\ \sigma x_3^2 = \dfrac{(\nu - e_3)(\varrho - e_3)}{(e_1 - e_3)^2(e_4 - e_3)}, \\ \sigma x_4^2 = \dfrac{(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)^2(e_3 - e_4)} \cdot \mu', \\ \sigma x_5^2 = \dfrac{(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)^2(e_3 - e_4)} \cdot (1 - \mu'); \end{cases}$$

$$\mathrm{II\,b_2})\begin{cases}\sigma x_1^2 = -\dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_3 - e_1)(e_5 - e_1)}, \\ \sigma(2x_1x_2) = \dfrac{-\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{(e_3 - e_1)(e_5 - e_1)}\right], \\ \sigma x_3^2 = \dfrac{(\mu - e_3)(\varrho - e_3)}{(e_1 - e_3)^2(e_5 - e_3)} \cdot \nu', \\ \sigma x_4^2 = \dfrac{(\mu - e_3)(\varrho - e_3)}{(e_1 - e_3)^2(e_5 - e_3)} \cdot (1 - \nu'), \\ \sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu - e_5)(\varrho - e_5)}{(e_1 - e_5)^2(e_3 - e_5)}; \end{cases}$$

$$
\text{III b)} \begin{cases}
\sigma x_1^2 = \dfrac{(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_4 - e_1}, \\
\sigma(2x_1x_2) = \dfrac{\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_4 - e_1}\right], \\
\sigma(2x_1x_3 + x_2^2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial e_1^2}\left[\dfrac{(\nu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_4 - e_1}\right], \\
\sigma x_4^2 = \dfrac{(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)^3}\cdot \mu', \\
\sigma x_5^2 = \dfrac{(\nu - e_4)(\varrho - e_4)}{(e_1 - e_4)^3}(1 - \mu').
\end{cases}
$$

Hiermit haben wir alle diejenigen Fälle behandelt, welche in der Ueberschrift dieses Paragraphen gemeint sind. *In jedem von ihnen sind wir, beim Zusammenfallen zweier Wurzeln e_i, e_j zu einer Doppelwurzel* (11), *zu einem Kugelbüschel übergegangen, indem wir setzten:*

$$e_j = e_i + \varepsilon, \qquad \lambda = e_i + \varepsilon\lambda'.$$

Die Gleichung des Kugelbüschels lautet:

$$\frac{x_i^2}{\lambda'} + \frac{x_j^2}{\lambda' - 1} = 0,$$

woraus wir sehen, dass die Kugeln x_i und x_j, welche den zusammenfallenden Wurzeln entsprechen, jedesmal an dem Büschel Theil nehmen.

Wir bemerken ferner, dass die durch diese Grenzübergänge eingeführten Büschel von Kugelpaaren geradezu mit der Flächenschaar I′c₁) oder I′c₂) übereinstimmen. Ja es stimmt sogar der Parameter λ mit dem oben eingeführten Parameter λ' überein, wenn wir in diesen Fällen die dreifache Wurzel ins Unendliche werfen und die zwei einfachen Wurzeln in die Punkte 0 und 1 legen, was ja durch lineare Substitution des λ erreicht werden kann. Wir können also geradezu sagen, dass wir das Flächensystem I′b₃) durch ein Flächensystem I′c₁) ergänzt haben. Nun haben wir aber schon im vorigen Kapitel gesehen, dass der Fall I′b₃) auch als Grenzfall des Falles I″a) angesehen werden kann. Wenn wir diesen Grenzübergang analytisch verfolgen, kommen wir in der unmittelbaren Nähe der Doppelwurzel auf einen Kugelbüschel I″c). Machen wir nämlich die Substitution:

$$e_1 = \frac{e_1 + e_2}{2} + i\varepsilon, \quad e_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} - i\varepsilon, \quad \lambda = \frac{e_1 + e_2}{2} + \varepsilon\lambda',$$

und setzen dies in die Gleichung der Cyclidenschaar I″a) ein, so geht diese Gleichung, indem wir ε gegen Null convergiren lassen, in folgende über:

$$\frac{x_1^2}{\lambda' - i} + \frac{x_2^2}{\lambda' + i} = 0,$$

welche geradezu ein Flächensystem I″c) vorstellt, wobei $e_1 = +i$, $e_2 = -i$, $e_3 = \infty$. Die Formeln zur Einführung der neuen Coordinate sind natürlich dieselben wie beim anderen Grenzübergang.

Es sind also verschiedene Auffassungen des in Rede stehenden Grenzfalles möglich.

§ 3. Ueber die übrigen Ausartungen des cyclidischen Coordinatensystems.

Fassen wir zunächst die Fälle ins Auge, wo ausser etwaigen Doppelwurzeln (11) nur noch mehrfache Wurzeln (21) oder (31) vorkommen, nämlich die Fälle II d), II e), III c).

Um beim Falle II d) die ergänzende Flächenschaar zu bekommen, setzen wir in der Gleichung der Flächenschaar II a):

$$e_3 = e_1 + \varepsilon, \qquad \varrho = e_1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \varrho';$$

dann geht dieselbe über in:

$$\frac{x_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{2x_1x_2}{\varepsilon} + \frac{x_3^2}{\varepsilon^2 \varrho'} + \frac{x_4^2}{e_1 - e_4} + \frac{x_5^2}{e_1 - e_5} = 0,$$

oder wenn $\varepsilon = 0$:

$$x_1^2 + \frac{x_3^2}{\varrho'} = 0;$$

und dies ist genau die Schaar II f), wo $e_1 = \infty$, $e_5 = 0$ *).

Beim Falle II e) müssen wir natürlich genau denselben Grenzübergang machen; zugleich müssen wir bei der Doppelwurzel (11) e_4 einen Grenzübergang nach Art des vorigen Paragraphen machen.

Auf solche Weise bekommen wir, wie leicht zu sehen ist, für die beiden Fälle folgende Formeln:

$$\text{II d)} \begin{cases} \sigma x_1^2 = -\dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)}, \\[2ex] \sigma(2x_1x_2) = \dfrac{-\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)}\right] - \dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)} \cdot \varrho', \\[2ex] \sigma x_3^2 = \dfrac{(\mu - e_1)(\nu - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)} \cdot \varrho', \\[2ex] \sigma x_4^2 = \dfrac{(\mu - e_4)(\nu - e_4)}{(e_1 - e_4)^2(e_5 - e_4)}, \\[2ex] \sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu - e_5)(\nu - e_5)}{(e_1 - e_5)^2(e_4 - e_5)}; \end{cases}$$

---

*) Um bei II f) e_1 ins Unendliche zu werfen, müssen wir uns natürlich der Formel von Seite 61 bedienen.

$$\text{II e)} \begin{cases} \sigma x_1^2 = -\dfrac{\nu - e_1}{e_4 - e_1}, \\ \sigma(2x_1x_2) = \dfrac{-\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{\nu - e_1}{e_4 - e_1}\right] - \dfrac{\nu - e_1}{e_4 - e_1}\cdot\varrho', \\ \sigma x_3^2 = \dfrac{\nu - e_1}{e_4 - e_1}\cdot\varrho', \\ \sigma x_4^2 = \dfrac{\nu - e_4}{(e_1 - e_4)^2}\cdot\mu', \\ \sigma x_5^2 = \dfrac{\nu - e_4}{(e_1 - e_4)^2}\cdot(1 - \mu'). \end{cases}$$

Um nun die Flächenschaaren des Falles III c) gleicherweise zu vervollständigen, setzen wir in der ν-Schaar des Falles III a):

$$e_4 = e_1 + \varepsilon, \qquad \nu = e_1 + \varepsilon + \varepsilon^3\nu'.$$

Dieselbe geht dann, wenn $\varepsilon = 0$, über in:

$$x_1^2 + \frac{x_4^2}{\nu'} = 0,$$

sodass wir wieder auf die Schaar II f) kommen. *Die Formeln lauten hier:*

$$\text{III c)} \begin{cases} \sigma x_1^2 = \dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_5 - e_1}, \\ \sigma(2x_1x_2) = \dfrac{\partial}{\partial e_1}\left[\dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_5 - e_1}\right], \\ \sigma(2x_1x_3 + x_2^2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial e_1^2}\left[\dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_5 - e_1}\right] + \dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_5 - e_1}\cdot\nu', \\ \sigma x_4^2 = -\dfrac{(\mu - e_1)(\varrho - e_1)}{e_5 - e_1}\cdot\nu', \\ \sigma x_5^2 = \dfrac{(\mu - e_5)(\varrho - e_5)}{(e_1 - e_5)^3}. \end{cases}$$

Hiermit haben wir nun alle Fälle discutirt, in denen mehrfache Wurzeln auftreten, die zwei verschiedenen Elementartheilern entsprechen, und wir haben gesehen, dass in der Nähe jeder solchen Wurzel ein Kugelbüschel durch Hülfsgrenzübergang zu suchen ist. *Wenn dagegen mehrfache Wurzeln auftreten, die drei oder vier verschiedenen Elementartheilern entsprechen, so sind in ihrer Nähe zwei bezw. drei Flächenschaaren durch Hülfsgrenzübergang zu suchen.* Diesen Grenzübergang können wir aber immer auf verschiedene Weisen machen.

Wir erläutern dies an zwei Beispielen.

Fassen wir einmal den Fall I c_2) ins Auge, bei welchem zunächst nur ein Kugelbüschel μ vorhanden ist. Um die anderen zwei Flächenschaaren, die in der Nähe der dreifachen Wurzel (111) e_1 verloren ge-

gangen sind, zu erhalten, setzen wir in die Gleichung der Flächenschaar I′a) folgende Werthe ein:

$$e_2 = e_1 + \varepsilon f_1, \quad e_3 = e_1 + \varepsilon f_2, \quad \lambda = e_1 + \varepsilon \lambda'.$$

Wir bekommen dann in der Grenze:

$$\frac{x_1^2}{\lambda'} + \frac{x_2^2}{\lambda' - f_1} + \frac{x_3^2}{\lambda' - f_2} = 0,$$

was geradezu eine Flächenschaar I′b_1), I′b_2), I″b), I′c_1), I′d_1) ist, je nach der Wahl der Grössen f_1 und f_2. Hierdurch kommen wir aber auf keine neuen dreifach orthogonalen Flächensysteme, nur ergänzen wir diesmal den Kugelbüschel durch die weniger ausgearteten Flächenschaaren, anstatt wie vorher die weniger ausgearteten Flächenschaaren durch einen Kugelbüschel zu ergänzen.

Fassen wir andererseits den Kugelbüschel II f) ins Auge, in welchem ein vierfacher Punkt (211) auftritt. Die zwei eigentlichen Flächenschaaren, welche in der Nähe dieses Punktes verloren gegangen sind, bekommt man, indem man in der Gleichung II a) den Grenzübergang macht:

$$\begin{aligned} e_3 &= e_1 + \varepsilon + \varepsilon^2 f_1, \\ e_4 &= e_1 + \varepsilon + \varepsilon^2 f_2, \\ \lambda &= e_1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \lambda'. \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man die Flächenschaar:

$$x_1^2 + \frac{x_3^2}{\lambda' - f_1} + \frac{x_4^2}{\lambda' - f_2} = 0,$$

welche je nach der Wahl von f_1, f_2 eine Schaar II d), II e) oder II f) ist.

Auf die anderen Grenzübergänge dieser Art gehen wir der Kürze halber nicht näher ein. In der That sieht man sofort, dass dieselben zu keinem neuen Orthogonalsystem führen können, *es sei denn, dass sie zu einem dreifach orthogonalen Flächensystem führen, welches aus lauter Kugeln besteht*, ein Fall, den wir sofort behandeln werden. Im Uebrigen aber dürfen wir, um nicht zwecklose Wiederholungen zu machen, uns mit den schon gemachten Grenzübergängen begnügen und die Kugelbüschel dabei immer als Ergänzung ansehen, eine Verabredung, welche keineswegs einen tieferen Grund hat, sondern lediglich der Einfachheit halber geschieht.

Was nun die dreifach orthogonalen Systeme angeht, die aus lauter Kugeln bestehen, so überzeugt man sich leicht, dass es nur ein solches giebt: *dasjenige nämlich, welches aus drei Kugelbüscheln besteht, deren Grundkreise Punktkreise sind, welche in demselben Punkte, aber in*

drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen liegen. Das gewöhnliche rechtwinklige Cartesische Coordinatensystem ist hiermit natürlich reell kreisverwandt. Dieses Flächensystem könnten wir durch Hülfsgrenzübergang sowohl aus dem Falle IIf) als auch aus dem Falle IIId) ableiten und hierdurch ein entsprechendes Coordinatensystem aufstellen.

Beidemal würde aber einer der drei Kugelbüschel bevorzugt werden müssen, während sie geometrisch alle drei völlig gleichberechtigt sind. Wir ziehen es also vor, dieses dreifache Kugelsystem anders abzuleiten, nämlich dadurch, dass wir ein beliebiges anderes dreifach orthogonales Cyclidensystem von einem beliebigen nicht singulären Raumpunkte aus einer Aehnlichkeitstransformation unterwerfen mit unendlich grossem Index. *Hierdurch geht das Flächensystem, wie man sofort sieht, in ein dreifach orthogonales System von Ebenen über.* Wenn wir dann beliebig invertiren, bekommen wir das allgemeine Kugelsystem. Diesen Gedanken führen wir folgendermassen analytisch durch:

Wir legen zunächst das pentasphärische Coordinatensystem B′) von Seite 42 zu Grunde. Hierin wird eine Aehnlichkeitstransformation mit Index a vom Nullpunkte aus durch die Substitution ausgedrückt:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) \sim \left(a x_1,\ \frac{x_2}{a},\ x_3,\ x_4,\ x_5\right).$$

Hierdurch geht das System:

$$\frac{x_1^{\ 2}}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{2 x_1 x_2}{\lambda - e_1} + \frac{x_3^{\ 2}}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^{\ 2}}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^{\ 2}}{\lambda - e_5} = 0$$

der confocalen Flächen zweiten Grades *) über in:

$$\frac{a^2 x_1^{\ 2}}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{2 x_1 x_2}{\lambda - e_1} + \frac{x_3^{\ 2}}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^{\ 2}}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^{\ 2}}{\lambda - e_5} = 0.$$

Um nun die drei Systeme von Parallelebenen zu bekommen, müssen wir der Reihe nach setzen:

$$\lambda = e_3 + \varepsilon_3 \varrho', \quad \lambda = e_4 + \varepsilon_4 \nu', \quad \lambda = e_5 + \varepsilon_5 \mu'.$$

Indem wir zugleich a in der Weise unendlich werden lassen, dass:

$$\frac{a^2 \varepsilon_3}{(e_3 - e_1)^2} = 1, \quad \frac{a^2 \varepsilon_4}{(e_4 - e_1)^2} = 1, \quad \frac{a^2 \varepsilon_5}{(e_5 - e_1)^2} = 1,$$

erhalten wir als Gleichungen der drei Ebenensysteme:

---

*) Wir könnten hier ebensogut ein allgemeines Cyclidensystem als Ausgangspunkt gebrauchen, nur würden sich die Rechnungen dann etwas complicirter gestalten.

$$x_1^2 + \frac{x_3^2}{\varrho'} = 0, \quad x_1^2 + \frac{x_4^2}{\nu'} = 0, \quad x_1^2 + \frac{x_5^2}{\mu'} = 0.$$

Wenn nun x_1 nicht gerade die unendlich ferne Punktkugel bedeutet, und dementsprechend x_3, x_4, x_5 nicht Ebenen, sondern Kugeln sind, so werden diese drei Gleichungen das allgemeine System dreier orthogonaler Kugelbüschel darstellen. Die Formeln zur Einführung der μ', ν', ϱ' nehmen dann die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \sigma x_1^2 &= -1, \\ \sigma(2x_1x_2) &= -\mu' - \nu' - \varrho', \\ \sigma x_3^2 &= \varrho', \\ \sigma x_4^2 &= \nu', \\ \sigma x_5^2 &= \mu'. \end{aligned}$$

§ 4. Einführung transcendenter Coordinaten. Aufzählung der siebzehn krummlinigen Coordinatensysteme.

Anstatt der von uns bis jetzt gebrauchten krummlinigen Coordinaten μ, ν, ϱ bezw. μ', ν', ϱ' werden wir späterhin bei Gelegenheit gewisse transcendente Functionen derselben als Coordinaten gebrauchen. Diese *transcendenten krummlinigen Coordinaten* wollen wir also noch kurz zur Sprache bringen.

Fassen wir zunächst die allgemeinen Fälle I'a) und I''a) ins Auge, so wollen wir das hyperelliptische Integral betrachten

$$t = \int \frac{d\lambda}{2\sqrt{(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)(\lambda - e_4)(\lambda - e_5)}}.$$

Als untere Grenze dieses Integrals wählen wir einen beliebigen constanten Werth, als obere Grenze aber die Variable λ. Indem wir nun λ der Reihe nach die Werthe μ, ν, ϱ ertheilen, werden wir das Integral t durch die Buchstaben u, v, w bezeichnen, wobei wir aber im Allgemeinen drei verschiedene untere Grenzen für die Integrale u, v, w annehmen werden. *Wir können dann geradezu die Integrale u, v, w als cyclidische Coordinaten an Stelle von μ, ν, ϱ gebrauchen.* Beiläufig bemerken wir, dass, während ein Coordinatentripel (μ, ν, ϱ) nicht einen einzigen Punkt, sondern sechszehn verschiedene Punkte bestimmt (von denen im Falle I''a) die Hälfte imaginär ist), wir es durch passende Wahl der Integrationswege erreichen können, dass einem Coordinatentripel (u, v, w) nur ein Raumpunkt entspricht, sofern wir nur reelle Raumpunkte in Betracht ziehen. Diesen Umstand erwähnen wir ohne jedoch näher darauf einzugehen, weil er, wie wir

an einem Beispiele sofort sehen werden, sich bei den ausgearteten Coordinatensystemen von selbst aufdrängt.

Wenn man die entsprechenden Integrale u, v, w für die ausgearteten Flächenschaaren bildet, so sieht man sofort, dass dieselben nur noch höchstens elliptische Integrale sind*). Auf die verschiedenen Ausartungsfälle brauchen wir hier nicht näher einzugehen. Nur ein Fall möge seiner besonderen Einfachheit wegen noch zur Sprache gebracht werden.

Wie wir in § 2 dieses Kapitels gesehen haben, muss, wenn eine zweifache Wurzel (11) auftritt, die Flächenschaar durch einen Kugelbüschel ergänzt werden. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, in welchem dieser Büschel einen eintheiligen Grundkreis hat, und bezeichnen, um die Ideen zu fixiren, die zusammenfallenden Punkte als $e_4 e_5$. Um nun den Kugelbüschel zu bekommen, müssen wir den Grenzübergang machen:

$$e_5 = e_4 + \varepsilon, \quad \lambda = e_4 + \varepsilon\lambda'.$$

Hierdurch geht unser Integral t über in:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_4)(e_2 - e_4)(e_3 - e_4)}} \int \frac{d\lambda'}{2\sqrt{\lambda'(1 - \lambda')}}.$$

Setzen wir nun:

$$\varphi = \int \frac{d\lambda'}{2\sqrt{\lambda'(1 - \lambda')}} = \text{arc sin} \sqrt{\lambda'},$$

so sehen wir, dass φ eine sehr einfache geometrische Bedeutung hat. In der That haben wir gesehen, dass die Gleichung der ergänzenden Kugelbüschel die Gestalt hat:

$$\frac{x_4^2}{\lambda'} + \frac{x_5^2}{\lambda' - 1} = 0,$$

woraus es sich ergiebt, dass $\sqrt{\lambda'} = \frac{x_4}{\sqrt{x_4^2 + x_5^2}}$. Greifen wir nun zum einfachen pentasphärischen Coordinatensystem A') von S. 41 zurück, so sehen wir, dass der Kugelbüschel zu einem Ebenenbüschel wird, während

$$\varphi = \text{arc sin} \sqrt{\lambda'} = \text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

den Winkel bedeutet, welchen eine beliebige Ebene des Büschels mit der Ebene $x_4 = 0$ bildet. Da aber bei einer Kreisverwandtschaft

*) Aus der Theorie der Zweitheilung der elliptischen Functionen sieht man dann sofort, dass, auch in dem Falle IIa), jedem Coordinatentripel (u, v, w) ein einziger Raumpunkt entspricht, wobei wir uns nicht mehr auf reelle Raumpunkte zu beschränken brauchen.

Winkel ungeändert bleiben, können wir sofort folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Die für den Kugelbüschel einzuführende transcendente Coordinate t ist einfach mit dem Winkel proportional, welchen eine veränderliche Kugel des Büschels mit einer festen Kugel desselben bildet.

An diesem Beispiel sehen wir deutlich, wie die Einführung der transcendenten Coordinaten es ermöglicht, die Raumpunkte eindeutig durch die Coordinaten zu bestimmen. Jede Kugel wird nämlich durch den Grundkreis des Büschels in zwei Theile zerlegt, und während die frühere Coordinate λ zwei ganzen Kugelflächen entsprach, wird jetzt die transcendente Coordinate nur noch einem Theile einer Kugelfläche entsprechen.

Der zuletzt ausgesprochene Satz gilt natürlich auch, wenn der Grundkreis des Kugelbüschels nulltheilig ist, nur wird dann der Winkel φ imaginär*). Führt man in diesem Falle die neue Coordinate $r = e^{i\varphi}$ an Stelle von φ ein, so findet man durch eine einfache Rechnung, dass im speciellen Falle, in welchem die Kugeln des Büschels concentrisch sind, r einfach die Radien dieser Kugeln vorstellt.

Indem wir hiermit die Betrachtung dieser transcendenten Coordinaten abschliessen, bemerken wir, dass dieselben keine so fundamentale Bedeutung in unserer Theorie haben werden, wie es bei Lamé der Fall ist. In der That sind sie bei uns im Allgemeinen keine „thermometrischen Parameter "(vergl. Lamé: „Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes").

---

*) Den Satz des Textes können wir auch folgendermassen aussprechen, wobei der Fall eines Punktgrundkreises mitumfasst wird.

Am einfachsten schreibt sich die Gleichung des Kugelbüschels jedenfalls in der Form $S + kS' = 0$, wo $S = 0$ und $S' = 0$ irgend welche zwei Kugeln des Büschels bedeuten. Die Werthe von k bilden eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, worin wir die zwei (reellen, zusammenfallenden oder imaginären) Elemente auszeichnen wollen, welche den Punktkugeln des Büschels entsprechen. Auf diese zwei Elemente gründen wir eine hyperbolische, parabolische oder elliptische *projective Maassbestimmung* (vergl. Cayley, Phil. Trans. 1859 „A sixth Memoir on Quantics" und Klein Math. Ann. Bd. IV 1871 „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie"). *Auf Grund einer so festgelegten projectiven Maassbestimmung ist die transcendente Coordinate bei den ergänzenden Kugelbüscheln einfach gleich dem projectiven Maassunterschied zwischen einer variablen Kugel und einer festen Kugel der Schaar.* In der That haben wir bei der Maassbestimmung, nach dem Vorschlag von Klein l. c., eine multiplicative Constante zur Verfügung, so dass wir geradezu Gleichheit und nicht nur Proportionalität zwischen Coordinate und Maassunterschied erzielen können.

Diesen Paragraphen schliessen wir mit einer tabellarischen Zusammenstellung der verschiedenen Systeme krummliniger Coordinaten, mit welchen wir uns im Folgenden beschäftigen werden. Die Tabelle ist übrigens nur insofern vollständig, als alle dreifach orthogonalen Flächensysteme in ihr vorkommen, welche als Ausartungen der allgemeinen Cyclidensysteme angesehen werden können. Dagegen wird aus allen den verschiedenen Weisen, wie diese Flächensysteme als ausgeartete Flächen angesehen werden können, jedesmal nur *eine* herausgewählt, welche im Allgemeinen am zweckmässigsten erscheint. Hiermit ist nicht ausgeschlossen, dass man von den anderen Möglichkeit unter Umständen mit Vortheil Gebrauch machen könnte.

Wir geben nun die Tabelle an, indem wir jedesmal der Kürze halber nur eine einfache Flächenschaar des betreffenden Falles benennen, aus welcher die allgemeine Flächenschaar durch reelle Kreisverwandtschaft hervorgeht.

A) μ, ϱ = allgemeine zweitheilige Cycliden.
ν = allgemeine Ringcycliden.

B) μ, ν, ϱ = allgemeine eintheilige Cycliden.

C) ν = Rotationsringcycliden.
ϱ = zweitheilige Rotationscycliden.
μ' = Meridianebenenpaare.

D) μ, ϱ = zweitheilige Rotationscycliden.
ν' = Meridianebenenpaare.

E) μ, ν = Kegel zweiten Grades.
ϱ' = concentrische Kugelpaare.

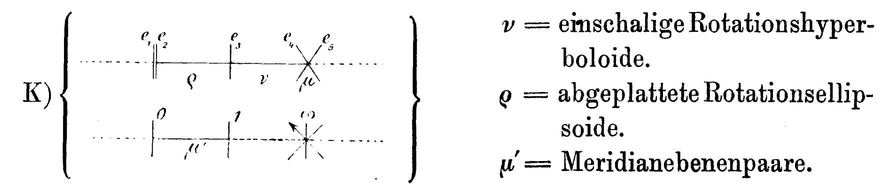
F) μ, ϱ = eintheilige Rotationscycliden.
ν' = Meridianebenenpaare.

G) ν = Kreisringe.
μ' = Meridianebenenpaare.
ϱ' = Büschel von Kugelpaaren mit eintheiligem Grundkreis.

H) ν = Rotationskegel.
μ' = Meridianebenenpaare.
ϱ' = concentrische Kugelpaare.

I) μ = zweischalige Hyperboloide.
ν = einschalige Hyperboloide.
ϱ = Ellipsoide.

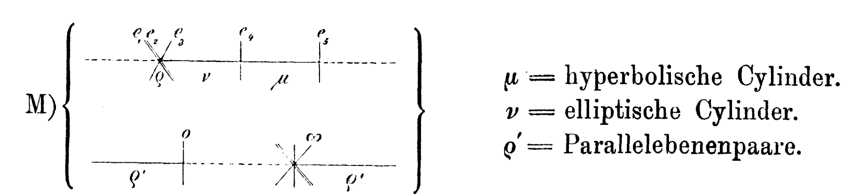
K)



ν = einschalige Rotationshyperboloide.
ϱ = abgeplattete Rotationsellipsoide.
μ' = Meridianebenenpaare.

L) μ = zweischalige Rotationshyperboloide.
ϱ = verlängerte Rotationsellipsoide.
ν' = Meridianebenenpaare.

M)

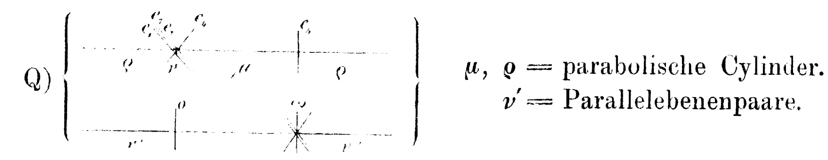


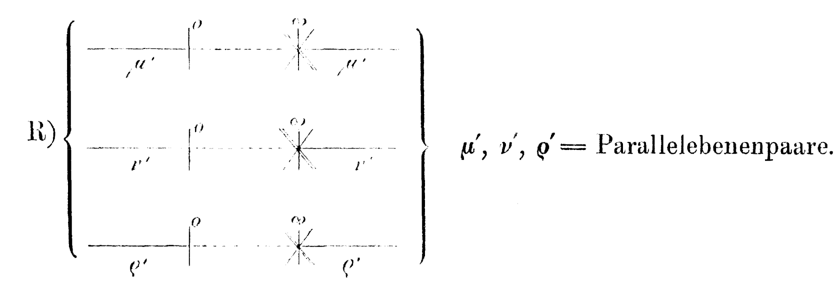
μ = hyperbolische Cylinder.
ν = elliptische Cylinder.
ϱ' = Parallelebenenpaare.

N) ν = Rotationscylinder.
μ' = Meridianebenenpaare.
ϱ' = Parallelebenenpaare.

O) ν, ϱ = elliptische Paraboloide.
μ = hyperbolische Paraboloide.

P) ν, ϱ = Rotationsparaboloide.
μ' = Meridianebenenpaare.

Q)

μ, ϱ = parabolische Cylinder.
ν' = Parallelebenenpaare.

R)

μ', ν', ϱ' = Parallelebenenpaare.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für allgemeine Cyclidensechsflache.

Nachdem wir im vorigen Abschnitt diejenigen Systeme krummliniger Coordinaten eingeführt haben, welche wir bei der Behandlung unseres Potentialproblems benutzen werden, wollen wir in diesem und dem hierauf folgenden Abschnitt die Frage beantworten, wie dieselben in der Potentialtheorie zu verwerthen sind. Uebrigens werden wir uns in diesem Abschnitt nur mit dem allgemeinen Falle beschäftigen, in welchem das Coordinatensystem I′a) oder I″a) zu Grunde gelegt wird, während wir alle diejenigen Fragen für den dritten Abschnitt aufheben, welche sich auf Special- oder Ausartungsfälle beziehen.

Ehe wir aber die soeben genannten physikalischen Probleme in Angriff nehmen, wollen wir uns vorab mit einer Gattung gewöhnlicher Differentialgleichungen beschäftigen, nämlich den *Lamé'schen Gleichungen*, mit welchen wir später vertraut sein müssen. Wir schicken also zunächst einige allgemeine auf diese Gleichungen bezügliche Erörterungen voraus.

Kapitel 1.

Ueber die Lamé'sche Gleichung.

§ 1. Allgemeines über die singulären Punkte linearer Differentialgleichungen.

Die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen zwischen zwei Variablen ist in den letzten Jahrzehnten bekanntlich Gegenstand zahlreicher functionentheoretischer Untersuchungen ge-

worden, welche auf Riemann zurückgehen (1857)*) und immer noch nicht als abgeschlossen zu betrachten sind. Wir brauchen hiervon zunächst nur einen speciellen Punkt, den Fuchs 1865 erledigt hat**), über den ich nunmehr in diesem Paragraphen referiren will. Wir werden uns dabei der Kürze halber auf Gleichungen *zweiter* Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

mit *rationalen* Coefficienten p, q beschränken, insofern wir keine allgemeineren Gleichungen gebrauchen werden.

Man nennt diejenigen Punkte der complexen x-Ebene, in denen mindestens einer der Coefficienten p und q unendlich wird, die *singulären Punkte* der Differentialgleichung. Bekanntlich wurde schon von Cauchy bewiesen, dass in dem Bereiche eines jeden nicht singulären Punktes x_0 zwei linear unabhängige Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung existiren, welche sich in Potenzreihen folgender Form entwickeln lassen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \quad (x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \cdots, \\ y_2 &= 1 \quad + * \quad + B_2(x - x_0)^2 + B_3(x - x_0)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Die Coefficienten dieser Reihenentwickelungen können wir leicht bestimmen. Setzen wir nämlich in die oben geschriebene Differentialgleichung die Reihe:

$$y = \sum_0^\infty{}_\nu C_\nu (x - x_0)^\nu$$

---

*) „Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen", Ges. Werke, S. 62. Vergl. auch Ges. Werke S. 357.

**) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten", Crelle Bd. 66.

Auf die schönen und äusserst fruchtbaren geometrischen Ideen, welche für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von Riemann aufgefunden und dann zunächst von Schwarz weiter entwickelt worden sind, können wir hier leider, da wir nicht zu weit ausholen wollen, nicht eingehen. Dieselben beziehen sich auf die conforme Abbildung der x-Ebene, welche durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung vermittelt wird. Dieser Quotient, welchen Schwarz mit dem Buchstaben s bezeichnet, genügt selber einer nicht linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Wir verweisen hierüber einerseits auf die Originalabhandlung von Schwarz (1872) über die hypergeometrische Reihe, Crelle Bd. 75, Ges. Werke Bd. II, S. 211, andererseits auf die Darstellung S. 93 ff. der „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" von Klein-Fricke. Hieran schliessen sich die neuen Untersuchungen von Klein, Schönflies und Schilling in den letzten Bänden der mathematischen Annalen.

mit unbestimmten Coefficienten C_ν ein, und entwickeln wir zugleich die Coefficienten p und q in Reihen, welche nach Potenzen von $(x - x_0)$ fortschreiten. Dann können wir offenbar das ganze erste Glied der Differentialgleichung in eine einzige Potenzreihe zusammenziehen. Da letztere aber für alle Werthe von $x - x_0$ verschwinden muss, für welche sie überhaupt convergirt, so müssen die Coefficienten sämmtlicher Potenzen von $x - x_0$ verschwinden. Hierdurch bekommen wir aber eine unendliche Reihe von Gleichungen, welche die unbestimmten Constanten C_ν mit einander verbinden. Dieselben erlauben, wie man leicht nachrechnet, sämmtliche C_ν durch C_0 und C_1 auszudrücken. Indem wir nun der Reihe nach $C_0 = 0$, $C_1 = 1$ und $C_0 = 1$, $C_1 = 0$ annehmen, werden die übrigen Constanten $C_2, C_3, \ldots$ gerade die gesuchten Coefficienten $A_2, A_3, \ldots$ bezw. $B_2, B_3, \ldots$ werden.

Aus diesen zwei Zweigen y_1 und y_2 lässt sich dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in folgender Form zusammensetzen:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

wo c_1 und c_2 beliebige Constanten sind.

Um jetzt zu den singulären Punkten überzugehen, so werden wir mit Fuchs*) zwischen *regulären* und *irregulären* singulären Punkten unterscheiden.

In der Nähe eines *regulären* Punktes x_0 giebt es im Allgemeinen zwei linear unabhängige Lösungen, welche sich folgendermassen entwickeln lassen:

$$y_1 = (x - x_0)^{k'}[1 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots],$$
$$y_2 = (x - x_0)^{k''}[1 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots].$$

Ist dies der Fall, so heissen k' und k'' die *Exponenten* des Punktes x_0 (so dass insbesondere ein nicht singulärer Punkt als regulärer Punkt mit den Exponenten 0, 1 angesehen werden kann). Hier können wir wieder die in diesen Lösungen vorkommenden Constanten auf ähnliche Weise wie vorher bestimmen, indem wir in die Differentialgleichung eine Lösung von der Form:

$$y = (x - x_0)^k \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu (x - x_0)^\nu$$

einsetzen. Die unendliche Reihe von Gleichungen, die man auf diese Weise bekommt, gestattet nicht nur $C_1, C_2, \ldots$ eindeutig durch C_0 und k auszudrücken, sondern auch k selber als Wurzel einer quadra-

*) Die Bezeichnung stammt allerdings von Thomé her.

tischen Gleichung zu bestimmen. Indem wir denn $C_0 = 1$ setzen und k' und k'' als die Wurzeln der soeben genannten quadratischen Gleichung annehmen, haben wir dann gerade die Constanten der oben geschriebenen Lösungen bestimmt.

Wenn aber $k' = k''$ werden wir offenbar nur eine einzige Lösung von dieser Gestalt bekommen können. Aehnliches gilt im Allgemeinen auch, wenn sich k' von k'' um eine ganze Zahl unterscheidet. Sei nämlich $k' - k'' = l$ eine ganze positive Zahl, so wird die Reihe, welche dem Exponenten k'' entspricht, die Eigenthümlichkeit darbieten, dass, wenn man in ihr $C_0 = 1$ setzt, die Coefficienten $C_l, C_{l+1}, \ldots$ sämmtlich unendlich werden. Setzt man dagegen $C_0 = 0$, so bekommt man auch $C_1 = C_2 = \cdots = C_{l-1} = 0$ und die Reihe reducirt sich auf die zum Exponenten k' gehörige Reihe. Wir müssen also hier eine neue Form für unsere eine Lösung suchen. In der That wird eine logarithmische Irrationalität hinzukommen, in der Art, dass wir schreiben müssen:

$$y_1 = (x - x_0)^{k'} [1 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots],$$
$$y_2 = (x - x_0)^{k''} [1 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots] + C y_1 \log (x - x_0).$$

Existiren schliesslich in der Nähe eines singulären Punktes x_0 keine zwei linear unabhängige Lösungen, welche sich in der einen oder der anderen der angegebenen Formen entwickeln lassen, so heisst dieser Punkt *irregulär*.

Nun ist es die besondere Leistung von Fuchs gewesen, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt zu haben, dass ein singulärer Punkt x_0 der vorgelegten Differentialgleichung regulär sein soll. Diese Bedingung besteht einfach darin, dass die beiden Grenzwerthe:

$$1) \text{ limes } [p \cdot (x - x_0)]_{x = x_0},$$
$$2) \text{ limes } [q \cdot (x - x_0)^2]_{x = x_0},$$

nicht unendlich sein sollen; oder mit anderen Worten, dass wenn $x = x_0$, p höchstens einfach, q höchstens zweifach unendlich wird*).

Was wir bis jetzt gesagt haben, bezieht sich zunächst nur auf endliche Werthe der Variablen x. Inzwischen wird man die ganze

*) Man findet durch leichte Nachrechnung, dass diese Bedingung für die Existenz zweier *formalen* Lösungen der oben besprochenen Sorten nothwendig und hinreichend ist. Um aber noch zu zeigen, dass diese Reihen auch reale Lösungen sind, muss man ihre Convergenz nachweisen. Man vergl. hierüber am besten Frobenius: „Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen", Crelle Bd. 76.

Entwickelung in leichter Weise auf den Punkt $x = \infty$ ausdehnen. Um nämlich über den Punkt $x = \infty$ etwas zu erfahren, werden wir die Hülfsvariable $x' = \frac{1}{x}$ in die Differentialgleichung einführen und dann die Natur des Punktes $x' = 0$ nach den soeben gegebenen Regeln untersuchen. Wenn es sich herausstellt, dass dieser Punkt regulär ist (bezw. nicht singulär), werden wir den Punkt $x = \infty$ der ursprünglichen Differentialgleichung ebenfalls regulär (bezw. nicht singulär) nennen, und werden dann im Bereiche dieses Punktes zwei linear unabhängige Lösungen in einer der oben angegebenen Formen entwickeln können, nur dass an Stelle von $x - x_0$ jetzt $\frac{1}{x}$ treten wird.

Indem wir nun die Hülfsvariable $x' = \frac{1}{x}$ in die Differentialgleichung einführen, nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$\frac{d^2 y}{dx'^2} + \frac{2x' - p}{x'^2} \cdot \frac{dy}{dx'} + \frac{q}{x'^4} \cdot y = 0.$$

Damit also der Punkt $x = \infty$ kein singulärer Punkt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

sein soll, muss, wenn $x = \infty$, der Coefficient p verschwinden wie $\frac{2}{x}$, q aber irgendwie von der vierten Ordnung unendlich klein werden.

Andererseits besteht das Kriterium dafür, dass die oben geschriebene Differentialgleichung bei $x = \infty$ einen *regulären* Punkt haben soll, einfach darin, dass dort p mindestens von der ersten, q mindestens von der zweiten Ordnung unendlich klein wird.

§ 2. Specielle Vorbereitung zur Aufstellung der Lamé'schen Gleichung.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass, wenn in einem regulären Punkte die Exponentendifferenz eine ganze Zahl ist, im Allgemeinen ein Logarithmus in der Entwickelung der einen Particularlösung auftritt. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie schon das Beispiel eines nicht singulären Punktes zeigt, wobei man es ja mit einem regulären Punkte mit den Exponenten 0, 1 zu thun hat. Dasselbe kann auch eintreten, falls nicht gerade $k' = k''$, wenn der betreffende Punkt wirklich ein singulärer ist, doch werden wir einen solchen Punkt aus Gründen, die wir bald angeben, einen *halbsingulären* Punkt nennen. Wir definiren also:

Ein halbsingulärer Punkt ist ein solcher, in dessen Nähe, trotzdem seine Exponentendifferenz ganzzahlig ist, keine logarithmische Irrationalität auftritt.

Eine specielle Art halbsingulärer Punkte, welche wir als *uneigentlich* singuläre Punkte bezeichnen wollen, werden für uns im Folgenden von besonderer Wichtigkeit sein. Wir definiren dieselben folgendermassen:

Ein uneigentlich singulärer Punkt ist ein halbsingulärer Punkt mit der Exponentendifferenz Eins.

Man zeigt zunächst leicht, dass ein uneigentlich singulärer Punkt mit den Exponenten 0, 1 sich auf einen gewöhnlichen Punkt reducirt. Denn wenn die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

im Punkte x_0 die Exponenten 0, 1 haben soll, so muss in diesem Punkte, wie man sofort nachrechnet, der Coefficient p endlich bleiben, q aber höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden. Wenn nun aber q von der ersten Ordnung unendlich wird, kann man sogar nicht einmal eine formale Lösung von der Form:

$$y = 1 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

bei welcher das logarithmische Glied fehlt, finden, wie wir sie haben müssten, wenn x_0 ein uneigentlich singulärer Punkt sein soll. Es muss daher q im Punkte x_0 endlich bleiben, und damit ist bewiesen, dass dieser Punkt nicht uneigentlich singulär, sondern gar nicht singulär ist.

Wir werden jetzt eine Methode angeben, durch welche man bei einer vorgelegten Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

entscheiden kann, ob ein Punkt x_0 mit den Exponenten k' und k'', welche der Bedingung $k' - k'' = 1$ genügen, ein eigentlich singulärer Punkt ist oder nicht.

Wenn der Punkt nur uneigentlich singulär ist, so giebt es zwei linear unabhängige Lösungen folgender Form:

$$y_1 = (x - x_0)^{k''+1}[1 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots],$$
$$y_2 = (x - x_0)^{k''} \quad [1 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots];$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung kann man dann schreiben:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Führen wir nun in die Differentialgleichung die neue Variable $y' = (x - x_0)^{-k''} \cdot y$ ein, so bekommen wir eine neue lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten deren allgemeine Lösung die Form hat:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2',$$

wo:

$$y_1' = (x - x_0) + A_1(x - x_0)^2 + A_2(x - x_0)^3 + \cdots,$$
$$y_2' = 1 \qquad\quad + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots.$$

Hiernach sehen wir, dass der Punkt x_0 kein singulärer Punkt unserer neuen Differentialgleichung ist. Wäre dieser Punkt dagegen ein eigentlich singulärer Punkt der ursprünglichen Differentialgleichung gewesen, so wäre er es, wie man sofort sieht, nach dieser Transformation auch geblieben. Man bekommt demnach den Satz:

Hat ein singulärer Punkt x_0 die Exponentendifferenz Eins, so reducire man seine Exponenten auf die Werthe 0, 1 *durch Abtrennung eines Factors $(x - x_0)^{k''}$ von der abhängigen Variablen. Ist hiernach x_0 ein nicht singulärer Punkt, so war er ursprünglich ein uneigentlich singulärer Punkt, anderen Falls aber ein eigentlich singulärer Punkt*)*.

Um jetzt noch kurz auf den allgemeineren Fall eines halbsingulären Punktes zurück zu kommen, wollen wir auf das analytische Kriterium für das Vorhandensein eines solchen Punktes nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, dass die Benennung halbsingulär jetzt leicht zu verstehen ist. In der That, wenn man die Exponenten k', k'' hat und $k' - k'' = l$ eine ganze positive Zahl ist, so kann man auf ganz ähnliche Weise wie soeben diese Exponenten auf 0 und l reduciren. Dann hat keine der Lösungen der Differentialgleichung im betreffenden Punkte einen singulären Punkt, d. h. einen Unendlichkeits- oder Verzweigungspunkt; nur verschwindet eine derselben mehrfach, was offenbar allein in singulären Punkten der Differentialgleichung geschehen kann. Ein Punkt x_0 heisst also halbsingulär, wenn ev. nach

---

*) Wir können hiernach die Singularität eines uneigentlich singulären Punktes durch Abtrennung eines einfachen Factors vollständig wegschaffen, und hierin möge für uns die Berechtigung des Wortes *uneigentlich* liegen. Wir müssen aber bemerken, dass wir durch Zufügung eines solchen Factors den Punkt $x = \infty$ mit einer ebensolchen Singularität versehen haben, wie wir sie vom Punkte x_0 weggeschafft haben. Dies können wir aber, wie wir später am Beispiel der Lamé'schen Gleichung sehen werden, durch Einführung homogener Variablen vermeiden.

Andererseits wird die Schwarz'sche s-Function (vergl. die Bemerkung unter S. 106), bezw. die Differentialgleichung, welcher dieselbe genügt, in einem uneigentlich singulären Punkte der Differentialgleichung zweiter Ordnung überhaupt keinen singulären Punkt haben.

Abtrennung einer Potenz von $(x - x_0)$ von der unabhängigen Variablen keine Lösungen der Differentialgleichung im Punkte x_0 singulär sind.

Wir stellen uns jetzt folgende Frage:

Wie lautet die allgemeinste homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche sich überall regulär verhält, und im Endlichen nur die singulären Punkte $e_1, e_2, \ldots e_n$ besitzt, in denen sie die Exponentenpaare $k_1', k_1''; k_2', k_2''; \ldots k_n', k_n''$ aufweist?

Wir wollen zunächst die allgemeinste Differentialgleichung hinschreiben, welche sich im Endlichen überall regulär verhält, und dort nur die singulären Punkte $e_1, e_2, \ldots e_n$ besitzt. Sie wird offenbar lauten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{A_1}{x - e_1} + \frac{A_2}{x - e_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - e_n} + G'(x)\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{1}{(x - e_1)(x - e_2)\cdots(x - e_n)}\left(\frac{B_1}{x - e_1} + \frac{B_2}{x - e_2} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{B_n}{x - e_n} + G''(x)\right) y = 0,$$

wo die A und B beliebige Constanten, die G beliebige ganze rationale Functionen sind. Damit ferner der Punkt $x = \infty$ nicht irregulär sein soll, ist es (vergl. S. 109) nothwendig und hinreichend, dass die Function $G'(x)$ identisch verschwindet und die Function $G''(x)$ höchstens vom $(n - 2)^{\text{ten}}$ Grade ist, oder wie wir schreiben wollen:

$$G''(x) = G_{n-2}(x).$$

Um die Exponenten dieser Differentialgleichung in einem der singulären Punkte, etwa in e_1 zu bestimmen, tragen wir nach Vorschrift von Seite 107 die Reihe:

$$y = (x - e_1)^k [1 + C_1(x - e_1) + C_2(x - e_1)^2 + \cdots]$$

in die Differentialgleichung ein, setzen den Coefficienten von $(x - e_1)^{k-2}$ gleich Null, und bekommen zur Bestimmung der Exponenten die quadratische Gleichung:

$$k(k - 1) + A_1 k + \frac{B_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\cdots(e_1 - e_n)} = 0.$$

Nun verlangten wir aber, dass die Exponenten des Punktes e_1, d. h. die Wurzeln dieser Gleichung, die Werthe k_1', k_1'' seien. Es muss also sein:

$$\left.\begin{aligned} k_1' + k_1'' &= -A_1 + 1, \\ k_1' k_1'' &= \frac{B_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\cdots(e_1 - e_n)} \end{aligned}\right\} \text{oder} \left\{\begin{aligned} A_1 &= 1 - k_1' - k_1'', \\ B_1 &= k_1' k_1'' (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\cdots(e_1 - e_n). \end{aligned}\right.$$

Ganz entsprechende Werthe bekommen wir natürlich auch für die anderen A und B, und demnach lautet die gesuchte Differentialgleichung folgendermassen:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-k_1'-k_1''}{x-e_1}+\frac{1-k_2'-k_2''}{x-e_2}+\cdots+\frac{1-k_n'-k_n''}{x-e_n}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{1}{(x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_n)}\left[\frac{k_1'k_1''(e_1-e_2)(e_1-e_3)\cdots(e_1-e_n)}{x-e_1}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{k_n'k_n''(e_n-e_1)\cdots(e_n-e_{n-1})}{x-e_n}+G_{n-2}(x)\right]y=0.$$

Hierin bleiben, wie wir sehen, noch $n-1$ willkürliche Constanten, nämlich die Coefficienten der ganzen Function:

$$G_{n-2}(x)=c_{n-2}x^{n-2}+c_{n-3}x^{n-3}+\cdots+c_1x+c_0.$$

Wir haben aber bis jetzt noch gar keine Annahme über die Exponenten des Punktes $x=\infty$ gemacht, welcher im Allgemeinen ein singulärer Punkt der vorgelegten Differentialgleichung sein wird. Nun könnte man vielleicht meinen, dass man durch passende Wahl zweier der Coefficienten c über diese zwei Exponenten nach Belieben verfügen könnte. Dies ist aber nicht der Fall, denn wenn man die Exponenten des Punktes $x=\infty$ nach Vorschrift von Seite 109 berechnet, findet man, dass sie die Wurzeln folgender Gleichung sind:

$$k^2+(1-n+k_1'+k_1''+k_2'+k_2''+\cdots+k_n'+k_n'')k+c_{n-2}=0.$$

Demnach ist die Summe der in Rede stehenden Exponenten durch die Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte schon völlig bestimmt. Dagegen können wir offenbar durch passende Wahl von c_{n-2} einer beliebigen anderen linearen Verbindung dieser Exponenten, etwa ihrer Differenz, einen beliebigen Werth ertheilen. Es werden aber dann noch immer $n-2$ Constanten in der Differentialgleichung willkürlich bleiben.

§ 3. Allgemeine Definition der Lamé'schen Gleichung.

Die Differentialgleichung, welche von Lamé selbst in die Analysis eingeführt ist und dementsprechend im engeren Sinne seinen Namen trägt, lässt sich nach dem Voraufgehenden sehr einfach charakterisiren. Wir können sie nämlich in folgender Gestalt schreiben*):

*) Dies ist allerdings nicht genau die Gestalt, in welcher diese Gleichung zumeist in der Literatur auftritt. Um von unserer Form zu der gewöhnlich geuchten überzugehen, müssen wir einen der Punkte e_1, e_2, e_3 in den Nullpunkt

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e_1} + \frac{1}{x-e_2} + \frac{1}{x-e_3}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{Ax+B}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \cdot y = 0.$$

Diese Gleichung hat als singuläre Stellen die Punkte e_1, e_2, e_3, ∞, von denen jeder der drei ersten die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ besitzt, während der Punkt ∞ die Exponenten $\frac{1 \pm \sqrt{1+4A}}{4}$ aufweist. Die Constanten A und B dieser Gleichung werden nun von Lamé noch auf ganz bestimmte Weise ausgewählt.. *Inzwischen werden wir diese Specialisirung hier fallen lassen,* und führen damit also eine erste Verallgemeinerung für die Bedeutung des Wortes „Lamé'sche Gleichung" ein.

In der mitgetheilten Gleichung lassen wir jetzt zwei der singulären Punkte e_1, e_2, e_3 zusammenfallen. Man sieht dann mit leichter Mühe, dass die Exponenten des so entstehenden singulären Punktes nicht mehr die einfachen Werthe $0, \frac{1}{2}$ haben, sondern allgemeinere Werthe, welche von den Constanten A und B der Differentialgleichung abhängen. Nun bemerkten wir aber schon, dass die Exponenten des Punktes ∞ ebenfalls von der Constante A abhängen. Es bietet sich hier die Idee, dass *die gewöhnliche Lamé'sche Gleichung aus einer Gleichung, welche fünf singuläre Punkte mit den Exponenten $0, \frac{1}{2}$ im Endlichen, im Unendlichen aber höchstens einen uneigentlich singulären Punkt besitzt, so abgeleitet werden kann, dass wir zwei dieser Punkte im Unendlichen zusammenfallen lassen.* Da dies in der That der Fall ist, wie wir späterhin sehen werden*), werden wir den Namen Lamé'sche Gleichung auf diese allgemeinere Gleichung mit fünf singulären Punkten im Endlichen übertragen. Indem wir nun diese Gleichung noch in ähnlicher Weise erweitern, wie dies Heine gegenüber der ursprünglichen Lamé'schen Gleichung gethan hat, indem wir also statt der fünf singulären Punkte mit den Exponenten $0, \frac{1}{2}$ deren beliebig viele zulassen, können wir schliesslich folgende Definition aussprechen:

Mit dem Namen Lamé'sche Gleichung bezeichnen wir eine überall reguläre homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit ra-

---

legen, und dann die quadratische Transformation $x \sim x^2$ machen. Diese Transformation verwischt aber den wahren Charakter der Differentialgleichung, auf den es weiterhin ankommt, insofern sie einen der drei gleichberechtigten singulären Punkte zu einem nicht singulären Punkte macht und die anderen zwei verdoppelt (ganz ähnlich wie dies mit den Verzweigungspunkten der elliptischen Integrale bei der sog. Legendre'schen Normalform geschieht).

*) Vergl. III, 1, § 1.

tionalen Coefficienten, deren im Endlichen gelegene singuläre Punkte e_1, $e_2, \ldots e_n$ *sämmtlich die Exponenten* $0, \frac{1}{2}$ *besitzen, und die im Unendlichen nur einen uneigentlich singulären Punkt aufweist. Jede Lösung einer solchen Lamé'schen Gleichung soll eine Lamé'sche Function heissen**).

Die allgemeine so definirte Lamé'sche Gleichung können wir nun hinschreiben, indem wir auf die Resultate des vorigen Paragraphen Bezug nehmen. Wir haben nämlich zu setzen $k_1' = k_2' = \cdots = k_n' = \frac{1}{2}$ und $k_1'' = k_2'' = \cdots = k_n'' = 0$. Dann nimmt die Gleichung zur Bestimmung der Exponenten des Punktes ∞ die Gestalt an:

$$k^2 + \left(1 - \frac{n}{2}\right) k + c_{n-2} = 0.$$

Bezeichnen wir jetzt mit k_1 und k_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so haben wir:

$$k_1 + k_2 = \frac{n}{2} - 1.$$

Nun verlangen wir aber für die Lamé'sche Gleichung, dass:

$$k_1 - k_2 = 1;$$

folglich müssen wir haben:

$$k_1 = \frac{n}{4}, \qquad k_2 = \frac{n-4}{4},$$

und folglich:

$$c_{n-2} = k_1 k_2 = \frac{n(n-4)}{16}.$$

Hiernach wird die Lamé'sche Gleichung von der Form sein:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e_1} + \frac{1}{x-e_2} + \cdots + \frac{1}{x-e_n}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{1}{(x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_n)}\left[\frac{n(n-4)}{16} x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} + \cdots + c_0\right] y = 0,$$

und es bleibt nur noch übrig die Constanten c so zu bestimmen, dass der Punkt ∞ nicht mehr eigentlich singulär ist. Um dies zu

---

*) Diese Definition stimmt, wie wir sofort sehen werden, im Wesen der Sache mit derjenigen überein, welche Klein in seiner Vorlesung gegeben hat (vergl. auch Gött. Nachr., März 1890, sowie Math. Ann. Bd. 38). Was die Beziehung zu Heine angeht, so kann man unsere Lamé'sche Gleichung offenbar als Specialfall seiner Gleichung von der „Ordnung" $(n-1)$ ansehen (vergl. Heine's Handbuch der Kugelfunctionen Bd. I S. 445). Entsprechend dem soeben angedeuteten Grenzübergange ziehen wir aber vor, dieselbe vielmehr als eine Verallgemeinerung seiner Gleichung von der Ordnung $n-3$ zu betrachten. Vergl. unten l. c.

erzielen, verfahren wir so, dass wir verlangen, dass nach Abtrennung eines Factors $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-4}{4}}$ von der Variablen y der Punkt $x=\infty$ nicht mehr singulär ist (vergl. S. 111). Setzen wir aber:

$$y' = x^{\frac{n-4}{4}} \cdot y,$$

so geht die oben geschriebene Differentialgleichung in die folgende über:

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} + \left[\frac{4-n}{2} x^{-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e_1} + \cdots + \frac{1}{x-e_n}\right)\right]\frac{dy'}{dx}$$
$$+ \left[\frac{n(n-4)}{16} x^{-2} + \frac{4-n}{8} x^{-1}\left(\frac{1}{x-e_1} + \cdots + \frac{1}{x-e_n}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(x-e_1)\cdots(x-e_n)}\left(\frac{n(n-4)}{16} x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} + \cdots + c_0\right)\right] y' = 0.$$

Damit der Punkt $x=\infty$ kein singulärer Punkt dieser Differentialgleichung ist, muss in diesem Punkte nach der auf Seite 109 angegebenen Regel der Coefficient von $\frac{dy'}{dx}$ verschwinden wie $\frac{2}{x}$, der Coefficient von y' aber muss von der vierten Ordnung unendlich klein werden. Die erste dieser Bedingungen ist, wie man leicht sieht, in der oben geschriebenen Differentialgleichung schon erfüllt. Wenn wir jetzt den Coefficienten von y' nach fallenden Potenzen von x entwickeln, so verschwindet allerdings von selbst der Coefficient von x^{-2}, wir finden aber als Coefficient von x^{-3}:

$$\frac{4-n}{8}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + \frac{n(n-4)}{16}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + c_{n-3}.$$

Dieser Ausdruck muss verschwinden, wenn der Coefficient von y' im Punkte $x=\infty$ von der vierten Ordnung unendlich klein sein soll Hiernach finden wir schliesslich für c_{n-3} folgenden Werth:

$$c_{n-3} = -\frac{(n-2)(n-4)}{16}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n).$$

Wenn wir nun diesen Werth für c_{n-3} in die oben gefundene Gleichung für y einsetzen, bekommen wir die allgemeine Lamé'sche Gleichung. Dieselbe lässt sich aber in etwas einfacherer Form schreiben, wenn wir setzen:

$$f(x) = (x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_n), \quad \text{und} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Zugleich wollen wir statt der willkürlichen Coefficienten $c_{n-4}, c_{n-5} \ldots c_0$ die Ausdrücke $\frac{-A}{4}, \frac{-B}{4}, \ldots \frac{-M}{4}$ einführen. Hiernach lautet die allgemeine Lamé'sche Gleichung folgendermassen:

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{f'(x)}{2f(x)}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4f(x)}\Big[-\frac{n(n-4)}{4}x^{n-2}$$
$$+\frac{(n-2)(n-4)}{4}(e_1+e_2+\cdots+e_n)x^{n-3}+Ax^{n-4}+Bx^{n-5}+\cdots+M\Big]y=0.$$

Wenn wir nun ferner bemerken, dass:

$$\frac{n-4}{4(n-1)}f''(x)=\frac{n(n-4)}{4}x^{n-2}-\frac{(n-2)(n-4)}{4}(e_1+\cdots+e_n)x^{n-3}$$
$$+\text{ Glieder niedriger Ordnung}$$

ist, so bekommen wir als eine zweite Form der Lamé'schen Gleichung:

$$(2)\qquad 4f(x)\frac{d^2y}{dx^2}+2f'(x)\frac{dy}{dx}+\frac{n-4}{4(n-1)}f''(x)\cdot y$$
$$=(ax^{n-4}+bx^{n-5}+\cdots+m)\cdot y,$$

wo $a, b, \ldots m$ beliebige Constanten sein können.

Eine andere Umformung, welche in vielen Fällen zweckmässig ist, besteht darin, das hyperelliptische Integral:

$$t=\int\frac{dx}{2\sqrt{f(x)}}$$

als neue Variable einzuführen. Hierdurch bekommen wir folgende zwei neue Formen der Lamé'schen Gleichung:

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\Big[\frac{-n(n-4)}{4}x^{n-2}+\frac{(n-2)(n-4)}{4}(e_1+\cdots+e_n)x^{n-3}$$
$$+Ax^{n-4}+\cdots+M\Big]\cdot y,$$

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\Big[-\frac{(n-4)}{4(n-1)}f''(x)+ax^{n-4}+bx^{n-5}+\cdots+m\Big]\cdot y.$$

Man bemerke, dass ausser der Zahl n und den Argumenten $e_1, \ldots e_n$ der singulären Punkte noch in jeder der Formen (1) bis (4) $(n-3)$ willkürliche Constanten auftreten. Diese Constanten wollen wir mit Klein die *accessorischen Parameter* der Lamé'schen Gleichung nennen. Wir deuteten bereits an, dass wir später unter Umständen die singulären Punkte $e_1, e_2 \ldots e_n$ zum Theil zusammenrücken lassen wollen. Indem wir die dann entstehenden singulären Punkte als solche von höherer Multiplicität bezeichnen werden, nennen wir die $e_1, \ldots e_n$ selbst *einfache* singuläre Punkte.

Ehe wir diesen Paragraphen schliessen, wollen wir noch kurz den einfachsten Fall unserer Lamé'schen Gleichung besprechen, nämlich den Fall, wo $n=4$ ist. Die Lamé'schen Functionen dieses Falles lassen sich in einfachster Weise durch elliptische Integrale ausdrücken. Die Gleichung (3) oder (4) nimmt nämlich hier die Form an:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ay,$$

wo t das elliptische Integral ist:

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}},$$

und wir finden als deren allgemeine Lösung:

$$y = L \cdot \sin(\sqrt{-a} \cdot t) + M \cdot \cos(\sqrt{-a} \cdot t).$$

§ 4. Ueber die homogene Gestaltung der Lamé'schen Gleichung*).

Es ist eine Unvollkommenheit der voraufgehenden Theorie, dass der Punkt $x = \infty$ noch immer als singulärer Punkt, wenn auch nur als uneigentlich singulärer Punkt, auftreten musste. Diesen Uebelstand können wir aber durch *Einführung homogener Variablen* ganz wegschaffen, wie wir jetzt sehen werden.

Wir hatten im Punkte $x = \infty$ die beiden Exponenten $\frac{n}{4}$ und $\frac{n-4}{4}$. Schreiben wir jetzt, homogen machend:

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

so werden wir diese Exponenten offenbar auf 1, 0 reduciren (und damit eben die ganze Singularität des Punktes $x = \infty$ aufheben), indem wir an Stelle der Function y, die unserer Differentialgleichung genügt, die *Form:*

$$F(x_1, x_2) = x_2^{\frac{4-n}{4}} \cdot y$$

einführen. Die so entstehenden Formen werden kurzweg als *Lamé'sche Formen* zu bezeichnen sein. Sie genügen einer Differentialgleichung, welche, insofern sie zwei unabhängige Variable x_1 und x_2 enthält, eine partielle sein wird, welche aber nur noch bei $e_1, e_2, \ldots e_n$ singuläre Punkte besitzt und in ihnen gleichförmig die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ aufweist. Um dieselbe aufzustellen, knüpft man am besten an die im vorigen Paragraphen mit (2) bezeichnete Gleichungsform an. Hier müssen wir zunächst bemerken, dass:

*) Man vergl. hierüber den schon erwähnten Aufsatz von Klein, Göttinger Nachrichten, März 1890. Wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. 38. Vergl. ebenda die Note von Pick.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{d}{dx}$$

und folglich:

$$\frac{d}{dx} = x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = x_2^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Setzen wir nun ferner:

$$f(x) = \frac{1}{x_2^n} f(x_1, x_2),$$

so nimmt die Gleichung (2), wenn wir an Stelle von y F einführen, die Gestalt an:

$$4f(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{n-4}{4(n-1)} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot F$$
$$= x_2^2(a x_1^{n-4} + b x_1^{n-5} x_2 + \cdots + m x_2^{n-4})F.$$

Diese Differentialgleichung können wir noch auf eine merkwürdige Weise mittelst des Euler'schen Theorems über homogene Functionen umformen. Zuerst wollen wir aber folgende abgekürzte Schreibweise einführen: jede Differentiation nach x_1 möge durch einen unteren Index 1, jede Differentiation nach x_2 durch einen unteren Index 2 bezeichnet werden. So wird z. B. $F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$, $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}$ etc. zu schreiben sein. Das Euler'sche Theorem giebt uns dann folgende Relationen:

$$f_{11} = f_{11}, \quad f_1 = \frac{1}{n-1}(f_{11} \cdot x_1 + f_{12} \cdot x_2),$$

$$f = \frac{1}{n(n-1)}(f_{11} \cdot x_1^2 + 2f_{12} \cdot x_1 x_2 + f_{22} \cdot x_2^2);$$

$$F_{11} = F_{11}, \quad F_1 = \frac{-4}{n}(F_{11} \cdot x_1 + F_{12} \cdot x_2),$$

$$F = \frac{16}{n(n-4)}(F_{11} \cdot x_1^2 + 2F_{12} \cdot x_1 x_2 + F_{22} \cdot x_2^2).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die soeben gefundene Differentialgleichung ein, so nimmt sie folgende in x_1 und x_2 vollständig symmetrische Gestalt an:

$$f_{22}F_{11} - 2f_{12}F_{12} + f_{11}F_{22} = \frac{n(n-4)}{4}(a x_1^{n-4} + b x_1^{n-5} \cdot x_2 + \cdots + m x_2^{n-4})F.$$

Der Ausdruck linker Hand ist eine in der Formentheorie wohlbekannte Covariante: die *zweite Ueberschiebung* der Formen f und F, und möge der Kürze halber in Zukunft durch $(f, F)_2$ bezeichnet werden. Rechter Hand steht dagegen eine beliebige ganze rationale Form $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades von x_1, x_2, welche wir mit φ bezeichnen wollen. Indem wir ferner jeder Form einen Index hinzufügen, welcher ihren Grad an-

giebt, können wir die Lamé'sche Gleichung in folgender endgültiger Gestalt schreiben:

$$\left(f_n,\ F_{\frac{4-n}{4}}\right)_2 = \varphi_{n-4}\cdot F_{\frac{4-n}{4}}.$$

Auch hier finden wir in den Coefficienten von φ unsere $n-3$ accessorischen Parameter wieder.

Aus dieser Gleichung lesen wir folgende formentheoretische Definition der Lamé'schen Formen ab:

Eine Lamé'sche Form mit n einfachen singulären Punkten ist eine binäre Form $\frac{4-n}{4}$-ten Grades, welche zweimal über eine ganze rationale binäre Form n^{ten} Grades, deren Wurzeln die singulären Punkte sind, geschoben, sich selbst bis auf einen beliebigen ganzen rationalen Factor $(n-4)^{ten}$ Grades reproducirt.

Aus dieser homogenen Form sieht man klar, dass der Punkt ∞ für unsere Lamé'schen Functionen etwas Unwesentliches ist. Man kann auch bei unhomogener Schreibweise seine singuläre Stellung aufheben, wenn man dafür nur an irgend einer anderen Stelle einen entsprechenden uneigentlich singulären Punkt in Kauf nehmen will.

Kapitel 2.

Ueber das Oscillationstheorem der Lamé'schen Gleichung.

Nach den im vorigen Kapitel gegebenen analytischen Erläuterungen gehen wir jetzt dazu über, auf geometrischem Wege ein merkwürdiges Theorem für den reellen Verlauf der Lamé'schen Functionen aufzustellen, welches wir mit seinem Entdecker Klein, deren Beweismethoden wir uns in diesem Kapitel bedienen, als Oscillationstheorem bezeichnen.

§ 1. Allgemeines über den reellen Verlauf der Lamé'schen Curven $y = E(x)$ bei beliebigem n und besondere Angaben für $n = 4$.

Im Folgenden wollen wir annehmen, damit wir, unserem physikalischen Interesse entsprechend, ganz im reellen Gebiete bleiben können, dass sowohl die accessorischen Parameter der Lamé'schen Gleichung, als auch die Coefficienten der ausmultiplicirten Function:

$$f(x) = (x - e_1)(x - e_2) \cdots (x - e_n)$$

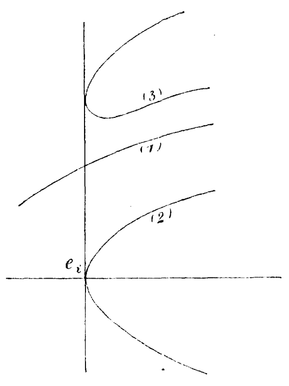
reell sind. Hiernach werden die singulären Punkte unserer Gleichung, sofern sie nicht paarweise einander conjugirt imaginär sind, reell sein.

Unter E eine beliebige reelle Lösung der Lamé'schen Gleichung verstanden, fassen wir jetzt die Curve $y = E(x)$ ins Auge und betrachten zunächst ihren Verlauf für solche Werthe von x, welche von einem reellen singulären Werthe e_i nur wenig verschieden sind. Natürlich entsprechen einer vorgelegten Lamé'schen Gleichung ∞^2 derartige Curven (oder vielmehr Curvenzweige). Aus den Potenzreihen von Seite 107 sehen wir, dass es unter diesen Curvenzweigen ∞^1 giebt ($y = L \cdot E_1(x)$), welche für den Werth $x = e_i$ keine Singularität aufweisen, und dass es ∞^1 andere giebt ($y = M \cdot E_2(x)$), welche die Ordinate $x = e_i$ im Punkte $y = 0$ parabelartig berühren. (Vergl. die Curven (1) und (2) der nebenstehenden Figur.)

Der allgemeine Zweig

$$y = L \cdot E_1(x) + M \cdot E_2(x)$$

wird also ganz auf der einen Seite der genannten Ordinate verlaufen und dieselbe in einem beliebigen Punkte berühren).* (Vergl. die Curve (3) der Figur.)



Nun wollen wir in diesem und dem nächsten Paragraphen den Verlauf einer Lamé'schen Curve zwischen zwei aufeinander folgenden einfachen singulären Stellen näher untersuchen. Der Bequemlichkeit halber werden wir aber annehmen, dass dieses Intervall der x-Axe ganz im Endlichen liege. In der That besitzt jede Lamé'sche Curve (sowie auch jede Lamé'sche *Function*), vermöge der von uns gegebenen Definition, den Punkt $x = \infty$ als uneigentlich singulären Punkt. Wenn wir also auch solche Intervalle der x-Axe in Betracht ziehen wollten, welche durch's Unendliche gehen, müssten wir jedesmal besondere Zusatzbetrachtungen für den Punkt $x = \infty$ machen. Hierdurch würde aber

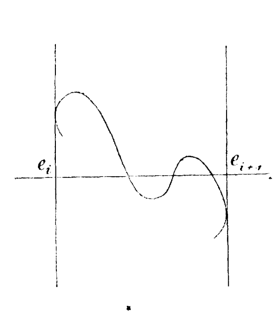
---

*) Indem wir die E_1, E_2 als die zu den Exponenten 0, $\frac{1}{2}$ im Punkte e_i gehörigen Lösungen wählen, ist offenbar nöthig, damit wir es überhaupt mit einem reellen Curvenzweig zu thun haben, dass in der Formel des Textes die Constante L reell genommen wird, während die Constante M entweder reell oder rein imaginär sein wird, je nachdem unser Curvenzweig rechter oder linker Hand von der Ordinate $x = e_i$ verlaufen soll.

unsere Theorie sehr weitläufig werden, und wir schliessen also der Kürze halber solche Intervalle im Folgenden aus*).

Was nun den Verlauf einer Lamé'schen Curve zwischen den Punkten e_i und e_{i+1} angeht, so sehen wir sofort, dass die Curve (sofern sie in dem Intervalle überhaupt reell ist) in demselben durchaus stetig verläuft und jedem x ein bestimmtes y eindeutig zuordnet. An den beiden Endordinaten des Intervalles wird dann aber die Curve im Allgemeinen parabelartig reflectirt, so dass wir es, wenn wir die Curve längs des Intervalles hin- und hergehend unbegrenzt verfolgen, allgemein zu reden mit einer unendlich vieldeutigen Function y von x zu thun haben; auf diese Weise kann dann eine Lamé'sche Curve ganz gut Doppelpunkte bekommen, indem zwei ihrer Zweige sich schneiden. *Jeder Zweig für sich genommen muss aber ohne Punktsingularität von dem einen Ende des Intervalles zum anderen laufen.* Es soll dies durch die nebenstehende Figur schematisch erläutert sein.

Wir können uns nun fragen, ob der einzelne Curvenzweig $y = E(x)$ zwischen den aufeinander folgenden singulären Stellen e_i und e_{i+1} der x-Axe mehrfach begegnet, wie wir es soeben in der Figur gezeichnet haben, oder nicht. Die Frage werden wir für den Fall $n = 5$, welcher uns am meisten interessirt, in den folgenden Paragraphen ausführlich behandeln. Wir können uns aber schon gewissermassen orientiren, indem wir vorab den noch einfacheren Fall $n = 4$ ins Auge fassen.



In diesem Falle haben wir als allgemeine Lamé'sche Curve (vergl. Seite 118) die folgende

$$y = L \cdot \sin(\sqrt{-a} \cdot t) + M \cdot \cos(\sqrt{-a} \cdot t),$$

wo t das elliptische Integral bedeutet:

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}}.$$

Nehmen wir e_1, e_2, e_3, e_4 sämmtlich reell an**), so ist die reelle

---

*) Dass die hiermit ausgeschlossenen Intervalle mit anderen Intervallen im Grunde völlig gleichberechtigt sind, sieht man beim Gebrauch homogener Variablen. In der That würden die zu entwickelnden Sätze, wenn man sie für Lamé'sche *Formen* ausspräche, keiner Modification bei solchen Intervallen bedürfen.

**) Die Modification der hierauf folgenden Ueberlegungen, die eintreten müsste, wenn zwei oder vier von den e einander paarweise conjugirt imaginär wären, ist leicht zu übersehen.

x-Axe durch diese Punkte in vier Intervalle getheilt. In zweien dieser Intervalle, welche nicht an einander grenzen und welche wir, um die Ideen zu fixiren, als $e_1 e_2$ und $e_3 e_4$ annehmen wollen, ist t (nach jedesmaliger geeigneter Wahl der unteren Integrationsgrenze) reell, in den anderen zwei (auf Grund entsprechender Annahme) rein imaginär. Hiernach sehen wir, *dass die Lamé'sche Curve entweder in den Intervallen $e_1 e_2$ und $e_3 e_4$ oder in den Intervallen $e_2 e_3$ und $e_4 e_1$ den Charakter einer Sinuscurve haben wird, je nachdem nämlich der accessorische Parameter a negativ oder positiv ist.*

Hiermit meinen wir, dass die Curve in den bezüglichen Intervallen ebenso *oscillirt* wie es eine Sinuscurve thut, nur dass die Längen der den verschiedenen Oscillationen entsprechenden Stücke der x-Axe einander nicht gleich zu sein brauchen. Uebrigens wird auch in diesem Falle die Lamé'sche Function $y = E(x)$ bei unbeschränkter analytischer (reeller) Fortsetzung im Allgemeinen unendlich vieldeutig sein, nicht wie der Sinus eindeutig. Lassen wir nämlich den reellen oder rein imaginären Werth von t unbegrenzt wachsen, so durchläuft x ein einziges Intervall immer wieder hin und zurück, und dementsprechend wird sich die Lamé'sche Curve, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, am Ende des Intervalles umbiegen, und dann in neuer Weise weiter oscilliren.

Es ist ferner zu bemerken, dass, damit wir von einer Oscillation der Curve sprechen dürfen, es nicht einmal nöthig ist, dass bei einmaliger Durchlaufung des Intervalles der Functionszweig überhaupt sein Vorzeichen wechselt; nur muss dies unendlich oft geschehen, wenn wir das Intervall unbegrenzt oft hin und her durchlaufen. Es werden einfach die Stücke der x-Axe, welche den verschiedenen Oscillationen entsprechen, in diesem Falle länger sein wie das Intervall selber, in welchem sie liegen *).

Fassen wir zusammen, so wird die Lamé'sche Curve, welchen reellen Werth a auch haben mag, in zweien der vier Intervalle oscilliren. In den anderen zwei Intervallen wird sie den Charakter einer Exponentialcurve besitzen; d. h. sie wird im Intervalle höchstens einmal der x-Axe begegnen, so oft wir das Intervall auch hin und her durchlaufen mögen und sich von derselben dann ins Unendliche erstrecken. Die umstehenden Figuren 1 und 2 (Seite 124) zeigen zwei verschiedene Formen, welche die Curven dieser Art haben können. Die erste derselben entspricht der hyperbolischen Sinuscurve, die zweite der hyper-

*) Auf ähnliche Umstände kommen wir wiederholt zurück. Vergl. insbesondere die Bemerkung auf Seite 124.

bolischen Cosinuscurve. Die dritte Figur giebt einen Grenzfall zwischen den zwei schon erwähnten Formen, in welchem sich die Curve der x-Axe unendlich nähert, aber sie niemals überschreitet wie in Fig. 1, und auch niemals wieder nach oben zurückkehrt wie in Fig. 2.

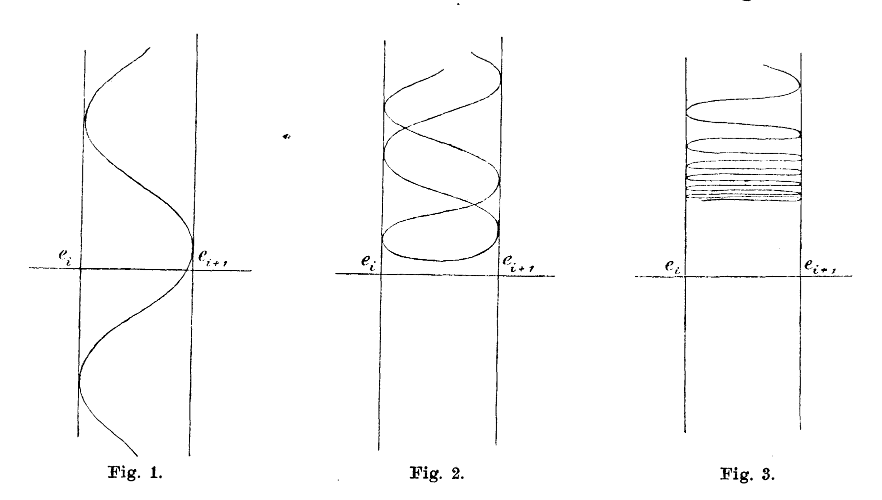


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Jedenfalls *oscilliren* die Lamé'schen Curven in diesen Intervallen nicht.

Schliesslich bemerken wir, dass wir, wie wir es durch passende Wahl des *Vorzeichens* des accessorischen Parameters a erreichen können, dass die Lösungen einer Lamé'schen Gleichung $n = 4$ in einem beliebigen der vier Intervalle der x-Axe oscilliren, so auch durch richtige Wahl der *Grösse* von a bewirken können, dass die Lösungen dieser Gleichung in einem beliebigen Segmente des Intervalles gerade eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Oscillationen ausführen. Das heisst: wir können die Stärke des Oscillirens durch den accessorischen Parameter genau reguliren. Es sei aber dabei besonders bemerkt, dass das betreffende Segment (für welches wir die Zahl der Oscillationen vorschreiben) länger sein darf als das Intervall, in welchem es liegt, d. h. dass es dieses Intervall zum Theil oder im Ganzen mehrfach umspannen kann *). Zugleich bemerken wir, dass es immer nur einen Werth von a giebt, welcher für ein gegebenes Segment eine vorgeschriebene Zahl von Oscillationen genau hervorrufen wird. Hiermit sind wir zum einfachsten Falle des von Klein für beliebige

*) Diese mehrfache Ueberdeckung der x-Axe entspricht genau der in der Functionentheorie wohlbekannten mehrfachen Ueberdeckung der complexen Zahlenebene durch eine mehrblättrige Riemann'sche Fläche, nur dass wir uns hier auf *reelle* Werthe der Variablen beschränken.

Lamé'sche Gleichungen aufgestellten *Oscillationstheorems* gelangt*). Wir werden das Oscillationstheorem für den Fall $n = 5$ in § 3 ausführlich besprechen, nachdem wir vorerst noch einige Hülfsbetrachtungen vorausgeschickt haben.

§ 2. Ueber die Oscillationseigenschaften der Lamé'schen Curven $n = 5$ in den Segmenten der einzelnen Intervalle der x-Axe.

Wir wollen hier für die Lamé'sche Gleichung die Form (4) von Seite 117 zu Grunde legen, die für $n = 5$ lautet:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-f''(x)}{16} + ax + b\right]y.$$

Dabei wollen wir dahingestellt sein lassen, ob sämmtliche Wurzeln von $f(x) = 0$ reell sind oder ob zwei von ihnen einander conjugirt imaginär sind**). In den sechs bezw. vier Intervallen der x-Axe, welche durch die reellen Punkte e_i und den Punkt $x = \infty$ begrenzt sind, kann das in Betracht kommende hyperelliptische Intervall t (durch jedesmal zweckmässige Annahme der unteren Integrationsgrenze) abwechselnd reell und rein imaginär angenommen werden.

Fassen wir zunächst eines der Intervalle ins Auge, für welche t reell angenommen werden kann. Dann ist die hier geschriebene Form der Lamé'schen Gleichung ohne Weiteres einer mechanischen Deutung fähig. Wir werden nämlich die Variable t als die Zeit und y als den Abstand eines Massenpunktes Eins von einem festen Kraftcentrum deuten. Der Massenpunkt soll sich nur auf seiner geraden Verbindungslinie mit dem Kraftcentrum bewegen können. Sobald wir jetzt annehmen, dass die anziehende Kraft des Centrums gleich der

*) Der soeben besprochene Fall des Oscillationstheorems ist natürlich trivial, da er sich auf wohlbekannte Eigenschaften der Kreisfunctionen reducirt. Von Sturm (Liouville's Journal Bd. I 1836) ist das Oscillationstheorem für Differentialgleichungen sehr allgemeiner Art bewiesen worden, welche eben wie die Lamé-schen Gleichungen $n = 4$ einen einzigen Parameter enthalten. Der Gedanke, das Oscillationstheorem auf Differentialgleichungen auszudehnen, welche mehr wie einen Parameter enthalten, ist zuerst von Klein gefasst worden. Derselbe hat 1881 (Math. Ann. Bd. 18, S. 419) das Theorem zunächst für Lamé's ursprüngliche Gleichung (siehe S. 114) aufgestellt. Später (in der Vorlesung von 1889—90) wurde es nicht nur auf den allgemeinen Fall $n = 5$ der Lamé'schen Gleichung ausgedehnt, sondern auch auf beliebige n, worauf wir hier nicht eingehen können.

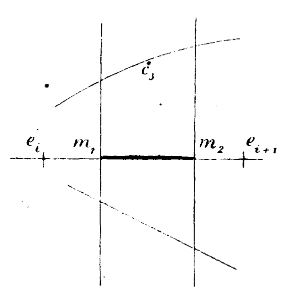
**) Der Fall, wo vier Wurzeln imaginär sind, wird hier nicht erwähnt, weil er weiterhin nicht in Betracht kommt.

$\left(\frac{f''(x)}{16} - ax - b\right)$-fachen Entfernung von demselben ist, erscheint die Lamé'sche Gleichung gerade als die *Bewegungsgleichung des Massenpunktes.* Da x eine Function von t ist, wird die Intensität der in Rede stehenden Kraft natürlich mit der Zeit veränderlich sein und eine abstossende Kraft werden, sobald $\left(\frac{f''(x)}{16} - ax - b\right)$ negativ ist.

Nun sehen wir unmittelbar mechanisch ein, dass, wenn die Kraft eine Zeit lang eine anziehende ist, der Massenpunkt um das Kraftcentrum herum hin und her oscilliren wird, und zwar um so rascher, je stärker die anziehende Kraft ist. Sobald aber die Kraft eine abstossende wird, verliert die Bewegung diesen oscillirenden Charakter und verläuft vielmehr so, dass der Massenpunkt, nachdem er höchstens noch einmal durch das Kraftcentrum hindurchgegangen ist, sich von demselben unbegrenzt entfernt.

Jetzt nehmen wir an, dass unser Massenpunkt zu einer Zeit, welche dem Werthe $x = m_1$ entsprechen mag, gerade durch das Kraftcentrum mit beliebiger Geschwindigkeit hindurchgeht. Wir lassen ferner t bis zu dem Betrage wachsen, der $x = m_2$ entspricht, und stellen uns folgende Frage:

Können wir die accessorischen Parameter a und b unserer Lamé'schen Gleichung so bestimmen, dass der Massenpunkt in dem betrachteten Zeitintervall genau m Halboscillationen ausführt?



Um diese Frage zu beantworten, ziehen wir die geometrische Anschauung zu Hülfe. Deuten wir wieder x als Abscisse, y als Ordinate, so entspricht unser Zeitintervall einem Segment $m_1 m_2$, welches keinen singulären Punkt überschreitet und welches ganz im Endlichen liegt. Dieses Segment kann natürlich das Intervall zwischen zwei benachbarten singulären Stellen, oder doch Theile dieses Intervalls, mehrfach überdecken; wir wollen aber zunächst annehmen, wie in der Figur angedeutet ist, dass dies nicht der Fall ist.

Nun construiren wir uns ferner die *Curve dritter Ordnung:*

$$c_3 \qquad y = \frac{f''(x)}{16},$$

und die *Hülfsgerade:*

$$(2) \qquad y = ax + b.$$

Die Differenz der Ordinaten dieser zwei Curven für eine beliebige Abscisse des Segmentes $m_1 m_2$ giebt die Kraft für den entsprechenden

Zeitmoment nach Grössen und Vorzeichen, und zwar so, dass die Kraft im einzelnen Zeitmoment anziehend wirkt, wenn die Hülfsgerade (wie dies in der Figur durchweg der Fall ist) unterhalb der Curve dritter Ordnung liegt, im anderen Falle aber abstossend.

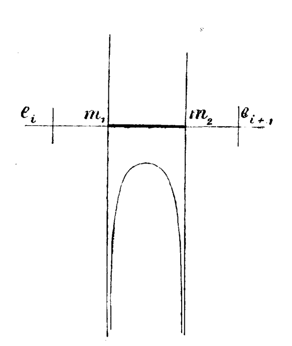
Die Curve dritter Ordnung, deren Gleichung keinerlei willkürliche Constante enthält, liegt durchaus fest und verläuft für endliche Abscissen x überall eindeutig, stetig und reell. Dagegen hängt die Lage der Hülfsgeraden vollständig von den accessorischen Parametern a und b ab. Geben wir dieser Hülfsgeraden irgend welche beliebige Richtung (welche nicht gerade senkrecht zur x-Axe ist), so können wir sie, wie auch die Curve dritter Ordnung im Segmente $m_1 m_2$ verlaufen mag, soweit nach unten schieben, dass sie in unserem Segmente überall um einen beliebig vorgegebenen Betrag unterhalb der Curve dritter Ordnung bleibt. Dies bedeutet aber für unser mechanisches Problem, dass wir die anziehende Kraft in jedem Augenblicke des für uns in Betracht kommenden Zeitintervalles einen beliebig gross vorgegebenen Werth überschreiten lassen können. Hierdurch werden wir erreichen können, dass die Anzahl der Halboscillationen, welche unser Massenpunkt in jenem Zeitintervall ausführt, eine willkürlich gegebene Zahl m überschreitet. Indem wir nun die Hülfsgerade unter Beibehaltung ihrer Richtung nach oben verschieben, wird für jedes in unser Intervall fallendes Zeitmoment die anziehende Kraft kleiner werden und zum Theil sogar abstossend wirken, sobald nämlich innerhalb des Segmentes Theile der Hülfsgeraden oberhalb der Curve dritter Ordnung liegen. Beim Aufwärtsschieben der Hülfsgeraden vermindert sich hiernach die Anzahl der Halboscillationen allmählich, und indem wir diesen Process gerade weit genug führen, können wir offenbar erreichen, dass diese Anzahl genau m wird. Wenn wir noch weiter gehen, wird und bleibt diese Anzahl kleiner wie m. — Indem wir jetzt die mechanische Formulirung verlassen, können wir das erhaltene Resultat in folgender Form aussprechen:

Für jede (nicht verticale) Richtung der Hülfsgeraden giebt es eine und nur eine Lage derselben, welche im Segmente $m_1 m_2$ genau m Halboscillationen derjenigen Lamé'schen Curven hervorruft, deren Ordinate im Punkte m_1 verschwindet.

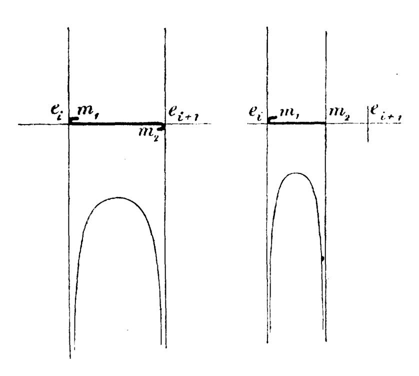
Fassen wir die Hülfsgeraden ins Auge, welche in der angegebenen Weise verschiedenen Richtungen entsprechen, so sehen wir, dass sie eine Curve umhüllen, die wir *Hüllcurve* nennen wollen. Eine erste Eigenschaft derselben, die wir aus dem Vorhergehenden ableiten, ist die, dass sie, weil sie keine parallelen Tangenten besitzt, auch keinen Wendepunkt haben kann. Nun sehen wir ferner, dass je zwei der hier

betrachteten Hülfsgeraden sich innerhalb des Streifens schneiden müssen, welcher von den Ordinaten in m_1 und m_2 begrenzt ist. Anderenfalls würde nämlich die eine dieser Hülfsgeraden in jedem Augenblicke des betrachteten Zeitintervalls stärkere Anziehung liefern wie die andere, was offenbar unmöglich ist, da sie dieselbe Anzahl von Oscillationen hervorrufen sollen. Hieraus schliessen wir, dass die Hüllcurve selbst ganz innerhalb dieses Streifens liegt (denn die Punkte der Curve sind doch jedesmal die Schnittpunkte zweier unendlich benachbarter Tangenten derselben).

Dem oben aufgestellten Satze entnehmen wir, dass die Hüllcurve eine und nur eine Tangente von jeder von der Verticalen verschiedenen Richtung hat. Jetzt lassen wir die Hülfsgerade, indem sie ihre verschiedenen Lagen durchläuft, immer steiler werden. Dies können wir auf zweierlei Weisen thun je nachdem die Hülfsgerade mit der x-Axe einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet. Beidemal wird sie sich einer verticalen Grenzlage nähern, welche eine Tangente (bezw. eine Asymptote) der Hüllcurve sein muss. Keine von diesen zwei Grenzlagen kann aber zwischen den Ordinaten in m_1 und m_2 liegen, weil sonst eine von ihr unendlich wenig verschiedene Tangente unendlich starke Anziehung für ein endliches Zeitintervall liefern würde, was ja unendlich viele Oscillationen verursachen müsste. Jede dieser verticalen Grenzlagen muss also in einer der Endordinaten des Segmentes $m_1 m_2$ liegen. Dass sie ferner beide Asymptoten sind, sehen wir durch folgende Ueberlegung. Eine von der Verticalen unendlich wenig verschiedene Tangente muss nämlich, da sie Anziehung nur für unendlich kurze Zeit verursacht, während dieser Zeit unendlich starke Anziehung geben, d. h. die Endordinate unendlich weit nach unten schneiden. Die Hüllcurve muss sich also der unteren Hälfte beider Endordinaten als Asymptoten nähern. Hiernach sehen wir, wie etwa die Hüllcurve gestaltet sein wird; insbesondere, dass sie überall convex nach oben sein wird. (Vergl. die Figur.) Für grosse Oscillationszahlen m wird diese Hüllcurve natürlich tief unterhalb der x-Axe liegen. Wenn dann m ein kleinerer Werth zugetheilt wird, verschiebt sich die Curve nach oben (ohne darum nothwendig mit sich selbst congruent zu bleiben) und wenn die Curve dritter Ordnung c_3 innerhalb des Segmentes hoch genug oberhalb der x-Axe verläuft, wird der Scheitel der Hüllcurve für kleines m sogar oberhalb der x-Axe liegen.



Nun sind diese Ueberlegungen ohne Weiteres auf Segmente anzuwenden, welche das Intervall $e_i e_{i+1}$, in welchem sie liegen, mehrfach überdecken*). Nur haben die betreffenden Hüllcurven dann nicht mehr die Ordinaten in den Endpunkten $m_1 m_2$ des Segmentes zu Asymptoten, sondern vielmehr die Ordinaten in denjenigen zwei Punkten, welche das ganze Segment zwischen sich einschliessen. Im Allgemeinen werden diese Asymptoten die Ordinaten in den Punkten e_i und e_{i+1}, sein; falls aber das Segment sich nur in einer Richtung bis an den Endpunkt des Intervalles hin erstrecken sollte, die Ordinate in diesem einen Endpunkte und daneben noch die Ordinate in demjenigen Endpunkte des Segments, welcher von dem genannten Endpunkte des Intervalles am weitesten entfernt liegt. (Vergl. die Figur, welche die beiden hier besprochenen Möglichkeiten darstellt.)



Mit dem Vorstehenden haben wir unsere Betrachtungen erst für diejenigen Intervalle der x-Axe zu Ende geführt, in welchen t reell genommen werden kann. Für die anderen Intervalle konnten wir die untere Integrationsgrenze jedesmal so wählen, dass t rein imaginär wird. Wir setzen dann einfach $t = i\tau$, und deuten die reelle Grösse τ als Zeit. Unsere mechanische Bewegungsgleichung nimmt so die Form an:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\left[-\frac{f''(x)}{16} + ax + b\right] y.$$

Wir können also unsere sämmtlichen Betrachtungen mutatis mutandis wiederholen, indem wir nur bemerken, dass wir jetzt Anziehung haben, wo wir früher Abstossung hatten und umgekehrt. Wir sehen also, dass diejenigen Hülfsgeraden $y = ax + b$, welche m Halboscillationen im Segmente $m_1 m_2$ hervorrufen, nach wie vor eine Curve umhüllen, welche keine Wendepunkte besitzt und die Endordinaten des Segmentes, bezw. des Intervalls der x-Axe, zu Asymptoten hat. Nur wird diese Hüllcurve jetzt convex nach *unten* sein und immer weiter nach *oben* liegen, je grösser der Werth von m ist.

*) Vergl. Bemerkung S. 124.

§ 3. Das Oscillationstheorem für die Lamé'sche Gleichung $n = 5$.

Durch die Untersuchungen des vorigen Paragraphen haben wir alle Mittel bereit gestellt, um nun das bereits oben genannte fundamentale *Oscillationstheorem* zu beweisen. Dasselbe lautet, wenn wir dasselbe so einschränken, wie es für unsere Zwecke zunächst ausreicht, folgendermassen:

Die accessorischen Parameter a und b einer Lamé'schen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass eine erste Particularlösung existirt, welche in einem ersten beliebigen Segmente $m_1 m_2$ eines Intervalles der reellen x-Axe genau m Halboscillationen ausführt, und dass gleichzeitig eine andere Particularlösung existirt, welche in einem beliebigen Segmente $n_1 n_2$ eines anderen Intervalles genau n Halboscillationen ausführt.

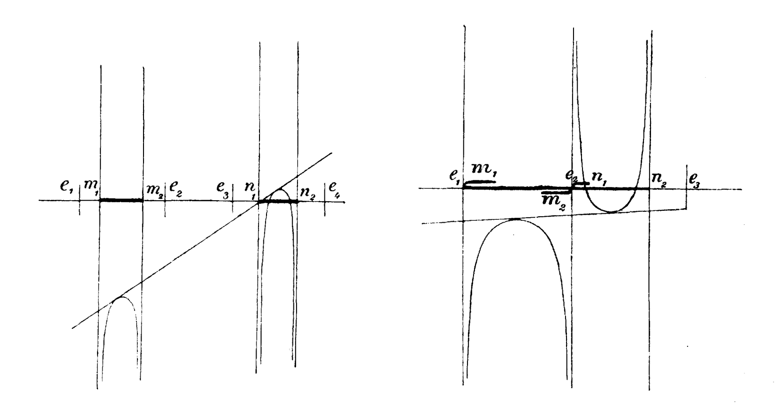
Dieses Theorem werden wir, unseren früheren Verabredungen entsprechend, nur unter der Voraussetzung beweisen, dass beide Segmente ganz im Endlichen liegen. Zu dem Zwecke fassen wir einfach die zwei Hüllcurven ins Auge, welche den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ betreffs der Oscillationszahlen m bezw. n zugehören. Da wir ausdrücklich verlangt haben, dass diese Segmente in verschiedenen Intervallen liegen sollen*), so werden die Hüllcurven in zwei von ihren Asymptoten abgegrenzten verticalen Streifen liegen, welche nicht über einander greifen. Wie die Hüllcurven innerhalb dieser Streifen gestaltet sein mögen, ob sie beide nach derselben Seite oder die eine nach oben, die andere nach unten convex sind, und wie weit jede von ihnen nach oben oder nach unten geschoben ist, darauf kommt es für unseren Zweck nicht an. Denn wir sehen sofort, dass abgesehen von einer im Grenzfalle etwa vorhandenen gemeinsamen Asymptote, *immer eine und nur eine Tangente den beiden Hüllcurven gemeinsam sein wird* (man vergleiche die beigesetzten Figuren S. 131)**).

---

*) Natürlich besteht das Theorem noch, wenn die zwei Segmente in einem und demselben Intervalle liegen, falls sie nur nicht über einander greifen. Dieser Fall kommt aber für uns nicht in Betracht.

**) Wir müssen die *Existenz* dieser Tangente der Anschauung entnehmen. Die eindeutige Bestimmtheit derselben aber, welche ebenfalls geometrisch evident ist (weil die Hüllcurven, wie schon bemerkt, keine Wendepunkte haben können), können wir auch durch folgende Ueberlegung ausser Zweifel setzen. Wir sahen schon, dass je zwei Tangenten einer Hüllcurve sich innerhalb des Streifens schneiden müssen, welcher von den Asymptoten der Hüllcurve begrenzt ist. Wenn also die zwei oben betrachteten Hüllcurven zwei gemeinsame Tangenten hätten, müssten sie sich ebensowohl innerhalb des einen als innerhalb des anderen Streifens schneiden, welche von den Asymptoten einer Hüllcurve begrenzt sind. Dies ist aber unmöglich, da diese zwei Streifen nicht über einander greifen.

Aber hiermit ist unser Oscillationstheorem bereits bewiesen. Denn diese eindeutig bestimmte, immer existirende, gemeinsame Tangente ist augenscheinlich die einzige Hülfsgerade, welche die vorgeschriebene Anzahl von Halboscillationen in den beiden Segmenten hervorruft.



Nun wäre natürlich die nächste Frage, wie diese accessorischen Parameter a und b dem Oscillationstheorem zufolge wirklich analytisch zu bestimmen sind. Hierzu bemerken wir, dass die Punkte m_1 und n_1, sofern sie nicht singuläre Punkte der Lamé'schen Gleichung sind, die Exponenten 0, 1 haben, sonst aber die Exponenten 0, $\frac{1}{2}$. Jedenfalls giebt es zwei Zweige der allgemeinen Lösung der Lamé'schen Gleichung, welche wir mit E_1 und E_2 bezeichnen wollen, die bezw. in den Punkten m_1 und n_1 verschwinden. Diese Zweige können wir auch wirklich ausdrücken als Potenzreihen, welche jedenfalls in der Nähe dieser Punkte convergiren. Welchen besonderen analytischen Ausdruck wir für diese Zweige zweckmässig gebrauchen werden, wollen wir hier nicht discutiren, sondern nur bemerken, dass derselbe nicht nur von der Variablen x, sondern auch von den accessorischen Parametern a und b abhängen wird. Wir wollen also schreiben, um dies anzudeuten, $E_1(x;\ a,\ b)$, $E_2(x;\ a,\ b)$. Wenn nun die Constanten a, b dem Oscillationstheorem entsprechend bestimmt sind, so müssen offenbar folgende Gleichungen stattfinden:

$$E_1(m_2;\ a,\ b) = 0,$$
$$E_2(n_2;\ a,\ b) = 0,$$

welche als Gleichungen in Liniencoordinaten a, b der zu den zwei Segmenten gehörenden Hüllcurven angesehen werden können. Die

Oscillationszahlen m, n kommen aber in diesen Gleichungen überhaupt nicht vor. Die Sache ist also die, dass jede der obigen Gleichungen die unendliche Reihe von Hüllcurven darstellt, welche zu verschiedenen Oscillationszahlen, aber demselben Segmente gehören. Die Gesammtheit dieser Hüllcurven ist also als eine einzige transcendente Curve zu betrachten, deren Zweige durch die verschiedenen Oscillationszahlen unterschieden werden.

Das Oscillationstheorem sagt uns nun geradezu, dass es unendlich viele reelle Lösungssysteme a, b der zwei oben geschriebenen simultanen Gleichungen giebt, von denen ein und nur ein Lösungssystem zu jedem Paar von Oscillationszahlen m, n gehört. Diese einzelnen Lösungen von einander durch Ungleichheiten zu separiren und dann eine Methode zu finden, wodurch sie bequem numerisch berechnet werden könnten, ist eine noch zu lösende Aufgabe*).

Jetzt erwähnen wir noch kurz folgendes verallgemeinertes Oscillationstheorem (K):

*Die accessorischen Parameter a und b einer Lamé'schen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass die Gleichung eine erste Lösung besitzt, welche in den Endpunkten eines beliebigen Segmentes $m_1 m_2$ eines ersten Intervalles der reellen x-Axe beliebig vorgeschriebene Werthe von $\frac{y}{\frac{dy}{dt}}$ besitzt**) und innerhalb dieses Segmentes m-mal verschwindet, während eine andere Lösung in den Endpunkten eines Segmentes $n_1 n_2$ eines anderen Intervalles ebenfalls beliebig vorgeschriebene Werthe von $\frac{y}{\frac{dy}{dt}}$ besitzt und innerhalb des Segmentes n-mal verschwindet.*

Auf die Begründung dieses Theorems gehen wir nicht näher ein, denn sie würde fast wörtlich dieselbe sein, wie im Falle des soeben ausführlich behandelten einfachen Oscillationstheorems. In der That ist letzteres nur der besondere Fall des soeben ausgesprochenen

---

*) Man vergl. hierzu die Abhandlung von Picard: Applications des méthodes d'approximations successives. Journal de Mathématiques 1893.

**) Wenn die Endpunkte der Segmente gewöhnliche Punkte der Differentialgleichung sind, könnten wir natürlich ebensogut die Werthe von $\frac{y}{\frac{dy}{dx}}$ in ihnen vorschreiben. In den singulären Punkten aber wird dieser Quotient im Allgemeinen Null sein.

Theorems, welcher eintritt, wenn die in beiden Endpunkten der beiden Segmente vorgeschriebenen Werthe von $\frac{y}{\frac{dy}{dt}}$ überall Null sind*).

Schliesslich kommen wir auf die Beschränkung zurück, welche wir unseren Segmenten auferlegt haben, dass sie nämlich durch's Unendliche nicht hindurch ziehen dürfen. Dieselbe ist nämlich offenbar für Lamé'sche *Functionen* nothwendig. Nun haben wir allerdings unseren ganzen Beweis mittelst Lamé'scher Curven geführt, welche durch Lamé'sche Functionen definirt werden. Das einmal erhaltene Theorem können wir aber sofort auf Lamé'sche *Formen* übertragen, wo es folgendermassen lauten wird (wir führen der Einfachheit halber nur das zuerst besprochene einfache Oscillationstheorem an):

Die accessorischen Parameter einer homogen geschriebenen Lamé'schen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass der Gleichung eine erste Lamé'sche Form genügt, welche in den Endpunkten eines beliebigen Segmentes $m_1 m_2$ eines ersten Intervalles der reellen x-Axe sowie innerhalb dieses Segmentes m-mal verschwindet, während zugleich die Gleichung durch eine andere Lamé'sche Form befriedigt wird, welche in den Endpunkten eines Segmentes $n_1 n_2$ eines anderen Intervalles und n-mal innerhalb dieses Segmentes verschwindet.

Dieses Theorem kann jetzt nicht mehr davon abhängen, dass die Segmente beide im Endlichen liegen, da der Punkt $x = \infty$ jetzt in keiner Weise von jedem anderen nicht singulären Punkte der Gleichung verschieden ist; das eine oder andere der beiden Segmente, von denen der Satz spricht, kann sich also nach Belieben durchs Unendliche ziehen.

Kapitel 3.

Ueber die Behandlung des Potentials durch pentasphärische und cyclidische Coordinaten.

In diesem und dem nächsten Kapitel kommen wir nun auf unsere ursprüngliche physikalische Fragestellung zurück. Ehe wir aber zu dem speciellen Potentialproblem übergehen können, welches wir zu lösen haben, müssen wir vorab einige allgemeinere Gesichtspunkte gewinnen, welche überhaupt für die höhere Potentialtheorie von weitgehender Bedeutung sind. Hiermit beschäftigen wir uns im ersten Paragraphen dieses Kapitels.

*) Die Anzahl der Halboscillationen ist natürlich immer um Eins grösser als die Anzahl von Nullstellen innerhalb des Segmentes.

Wir wollen aber schon hier ausdrücklich erwähnen, dass sich unsere Methoden insofern von den gewöhnlichen Methoden der mathematischen Physik unterscheiden, als wir unter Umständen *homogene Coordinaten* gebrauchen werden. Hierdurch führen wir keinen neuen Coordinatenbegriff, sondern nur eine neue Schreibweise ein, welche sich wegen ihrer Zweckmässigkeit bei allgemeinen Untersuchungen über Transformation etc. schon in vielen Zweigen der Geometrie und Analysis eingebürgert hat und mit gleichem Rechte ihre Stelle in der mathematischen Physik beanspruchen darf*).

Die zwei ersten Paragraphen dieses Kapitels gehen wesentlich auf zwei Noten von Darboux zurück**). Wir haben nur die Sache ausdrücklich vom Standpunkte der Geometrie der reciproken Radien her aufgefasst, und zugleich die Formeln auf übersichtlichere Weise abzuleiten versucht, wie dies Darboux gethan hat (K).

§ 1. Ueber die Behandlung der Potentialtheorie in der Geometrie der reciproken Radien.

Ebenso wie wir in der elementaren Potentialtheorie rechtwinklige Cartesische Coordinaten zu Grunde legen, so werden wir hier orthogonale pentasphärische Coordinaten gebrauchen, und zwar der Einfachheit halber solche mit der Identität:

$$\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 0.$$

Zunächst wollen wir das noch speciellere System A′) von Seite 41 in Betracht ziehen, wo nämlich:

$$x_1 = i(x^2 + y^2 + z^2 + t^2), \qquad x_3 = 2xt,$$
$$x_2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \qquad x_4 = 2yt,$$
$$x_5 = 2zt.$$

In diesen Formeln bedeuten x, y, z, t homogen gemachte rechtwinklige Coordinaten; d. h. die Quotienten:

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}$$

sind gewöhnliche Cartesische Coordinaten.

Nun genügt eine Potentialfunction $V(X, Y, Z)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0.$$

---

*) Man kann die vorhin besprochene homogene Form der Lamé'schen Differentialgleichung als ein Seitenstück hierzu betrachten.

**) Comptes Rendus 1876, II. Bd. 83, p. 1037 und p. 1099.

In diese Differentialgleichung können wir sofort die homogenen Coordinaten x, y, z, t einführen, und bekommen für das Potential $V\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn wir nun zum oben geschriebenen System pentasphärischer Coordinaten übergehen wollen, müssen wir setzen:

$$x = \frac{x_3}{2t}, \quad y = \frac{x_4}{2t}, \quad z = \frac{x_5}{2t}, \quad t = -\frac{x_2 + ix_1}{2t}.$$

Und es wird:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_3{}^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 4t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_4{}^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_5{}^2}.$$

Es wird also die Potentialfunction:

$$V\left(\frac{x_3}{-(x_2 + ix_1)}, \frac{x_4}{-(x_2 + ix_1)}, \frac{x_5}{-(x_2 + ix_1)}\right)$$

der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_3{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_4{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_5{}^2} = 0.$$

In dieser Gleichung erscheinen aber, wie in der vorausgesetzten Form von V selbst, noch nicht alle fünf pentasphärischen Coordinaten als gleichberechtigt, wie sie es natürlich in der Geometrie der reciproken Radien sind. Diesen Umstand können wir, wenigstens formell, dadurch in Wegfall bringen, dass wir bemerken, dass die Coordinaten x_1, x_2 nur in der Verbindung $x_2 + ix_1$ in der Function V vorkommen. Nach einem Fundamentalsatz der Theorie der Functionen eines complexen Argumentes genügt also V der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2{}^2} = 0.$$

Wir sehen also, dass unsere Potentialfunction folgender Differentialgleichung genügt, in welcher die fünf pentasphärischen Coordinaten ganz symmetrisch vorkommen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_4{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_5{}^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat aber zunächst keine tiefere Bedeutung, denn sie hört auf zu gelten, sobald V mittelst der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ umgeformt wird.

Dieser letzte Umstand hängt nun davon ab, dass wir uns, in der Geometrie der reciproken Radien, eigentlich nicht mit den Potential*functionen* beschäftigen sollten, sondern mit gewissen Potential*formen*,

welche dadurch entstehen, dass wir von den Potentialfunctionen einen einfachen Factor abtrennen. Diesen Gedanken drücken wir jetzt in folgendem Satze bestimmter aus, indem wir uns noch auf dasselbe besondere System pentasphärischer Coordinaten beschränken, wie soeben:

Ist V eine beliebige Potentialfunction und setzen wir:

$$V = (x_2 + i x_1)^{\frac{1}{2}} \cdot W_{-\frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

so wird die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0$$

durch die Form W befriedigt, wie letztere auch durch die Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ umgeformt werden mag. Ferner wird diese Differentialgleichung ungeändert befriedigt, wenn man W einer beliebigen Kreisverwandtschaft unterwirft.

Dieser Satz berechtigt uns, W eine *Potentialform* zu nennen. Um denselben zu beweisen, müssen wir dreierlei zeigen:

1) *In seiner ursprünglichen Gestalt genügt W der oben geschriebenen Differentialgleichung.* Zunächst wird W der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0$$

genügen, weil V schon derselben genügte und W sich von V nur durch einen Factor unterscheidet, welcher von x_3, x_4, x_5 unabhängig ist. Ferner enthält W die Veränderlichen x_1 und x_2 nur in der Verbindung $x_2 + i x_1$ und genügt also der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0.$$

Hiernach genügt W auch der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

2) *Nach Umformung durch die Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ genügt W derselben Differentialgleichung.*

Wir betrachten natürlich nur solche Umformungen, bei welchen W homogen bleibt. Wenn also $[W]$ die ursprüngliche Gestalt war, werden wir als allgemeines W haben:

$$W = [W] + \left(\sum_1^5 {}_i\, x_i^2\right) \cdot \chi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

wo χ eine beliebige Form $-\frac{5}{2}$-ter Dimension ist. Wir haben also nur zu zeigen, dass:

$$u = \left(\sum_1^5 {}_i \, x_i^2 \right) \cdot \chi$$

der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_5^2} = 0$$

identisch genügt, was auch χ sein mag. Nun ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 2\chi + 4 x_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_1} + \left(\sum_1^5 {}_i \, x_i^2 \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}.$$

Hier verschwindet der letzte Term wegen der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$. Indem wir nun entsprechende Ausdrücke für $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \cdots$ bilden und alle zusammenaddiren, bekommen wir:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 10\chi + 4 \sum_1^5 {}_i \left(x_i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right).$$

Erinnern wir uns jetzt, dass χ eine Form $-\frac{5}{2}$-ter Dimension ist, so sagt uns das Euler'sche Theorem über homogene Functionen, dass:

$$\sum_1^5 {}_i \left(x_i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right) = -\frac{5}{2} \chi.$$

Diesen Werth in die oben stehende Gleichung eingesetzt, giebt:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

3) *Wenn man W einer beliebigen Kreisverwandtschaft unterwirft, genügt sie noch immer derselben Differentialgleichung.* Jede Kreisverwandtschaft wird nämlich, wie wir wissen, durch eine homogene lineare Substitution der x_i ausgedrückt, welche die Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ ungeändert lässt. Nun ist es aber wohlbekannt, dass die ersten partiellen Ableitungen nach den x_i mit den x_i selber *contragredient* sind, d. h. wenn die x_i die Transformation erleiden:

$$\varrho \, x_i' = \sum_1^5 {}_k \, a_{ik} \, x_k,$$

so erleiden die Ableitungen die Transformation:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial x_i'} = \sum_1^5 {}_k \, a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Jetzt sind die Formeln, durch welche die x_i durch die x_i' ausgedrückt werden, auch gerade von dieser Gestalt, nämlich:

$$\sigma x_i = \sum_1^5{}_k a_{ki} \cdot x_k'.$$

Es sollen aber diese letzten Formeln, nach unserer früheren Voraussetzung, die Gleichung $\sum_1^5{}_i x_i'^2 = 0$ in die Gleichung $\sum_1^5{}_i x_i^2 = 0$ überführen, und folglich müssen die voraufgehenden Formeln die Gleichung $\sum_1^5{}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = 0$ in die Gleichung $\sum_1^5{}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = 0$ überführen *), w. z. b. w.

Hiermit haben wir also den oben ausgesprochenen Satz vollständig bewiesen. Derselbe bezieht sich zunächst nur auf ein ganz specielles System orthogonaler pentaphärischer Coordinaten, kann aber jetzt mit leichter Mühe auf das allgemeinste System orthogonaler pentasphärischer Coordinaten mit der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ ausgedehnt werden. Um nämlich von unserem ursprünglichen speciellen zu diesem allgemeineren Coordinatensystem überzugehen, gebrauchen wir gerade dieselben Formeln wie bei einer Kreisverwandtschaft, nur werden x_i und x_i' als Coordinaten eines und desselben Punktes in Bezug auf verschiedene Coordinatensysteme aufgefasst, nicht als Coordinaten zweier Punkte in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem. Hiervon sind aber die analytischen Schlüsse von A d. 3) oben unabhängig. Wir schliessen hieraus, dass W in Bezug auf ein beliebiges pentaphärisches Coordinatensystem mit der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ der Differentialgleichung genügt:

$$\sum_1^5{}_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0.$$

Der Factor $(x_2 + i x_1)^{\frac{1}{2}}$, mit welchem W multiplicirt sein müsste, damit wir zur Potentialfunction zurückkommen, geht natürlich jetzt

*) Wir haben es hier mit derselben Schlussweise zu thun, welche wir in der niederen Potentialtheorie brauchen müssen, wenn wir beweisen wollen, dass nach einer beliebigen Drehung um den Coordinatenanfangspunkt (ev. verbunden mit einer Spiegelung an einer durch denselben hindurchgehenden Ebene) ein beliebiges Potential, d. h. Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, ein Potential bleibt. Die soeben genannten Transformationen drücken sich nämlich durch diejenigen ganzen linearen Substitutionen von x, y, z aus, welche die Form $x^2 + y^2 + z^2$ in sich selbst überführen.

in die $\frac{1}{2}$-te Potenz der linken Seite der Gleichung der unendlich fernen Punktkugel, d. h. in

$$\left(\sum_1^5 i \frac{x_i}{R_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

über. Wir können also unserem früheren Satze folgende allgemeinere Fassung geben, in welcher man sich die x_i als beliebige pentaphärische Coordinaten mit der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ zu denken hat:

Ist V eine beliebige Potentialfunction und setzen wir:

$$V = \left(\sum_1^5 i \frac{x_i}{R_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot W_{-\frac{1}{2}},$$

so wird die „Potentialform“ W die Differentialgleichung:

$$\sum_1^5 i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0$$

befriedigen, wie man auch W mit Hülfe der Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ *umformen mag.*

Wir können diesen Satz aber auch umkehren und sagen:

Jede Form $-\frac{1}{2}$*-ter Dimension in den pentasphärischen Coordinaten (mit der Identität* $\Sigma x_i^2 = 0$*), welche der Differentialgleichung genügt:*

$$\sum_1^5 i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0,$$

ist eine Potentialform; d. h. liefert mit der $\frac{1}{2}$*-ten Potenz der linken Seite der Gleichung der unendlich fernen Punktkugel multiplicirt, eine Potentialfunction.*

Es genügt nämlich offenbar, diesen Satz für das specielle pentasphärische Coordinatensystem zu beweisen, welches wir oben zuerst betrachteten. Um den Satz aber für dieses besondere Coordinatensystem zu begründen, haben wir nur die gerade gegebenen Entwickelungen rückwärts zu durchlaufen, indem wir das gegebene W durch die Identität $\Sigma x_i^2 = 0$ in der Weise umformen, dass es die Variablen x_1 und x_2 nur noch in der Verbindung $x_2 + ix_1$ enthält (was wir so thun können, dass wir in die zwei Formen W und Σx_i^2 die Veränderlichen $x_2 + ix_1$ und $x_2 - ix_1$ an Stelle von x_1, x_2 einführen, dann $x_2 - ix_1$ mittelst der Identität durch $x_2 + ix_1$, x_3, x_4, x_5 ausdrücken und diesen Werth in W einsetzen). Dann genügt W der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0$$

und folglich auch der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0$$

etc.*).

§ 2. Ueber die Behandlung des Potentials mittelst cyclidischer Coordinaten.

Es wird jetzt darauf ankommen cyclidische Coordinaten an Stelle von pentasphärischen Coordinaten in die Gleichung der Potentialformen einzuführen. Dies ist aber offenbar nicht ohne Weiteres möglich, da wir vier unabhängige Grössen (die fünf pentasphärische Coordinaten unter Berücksichtigung der Identität $\Omega = 0$) nicht durch drei andere ersetzen können. Wir werden vielmehr, auf die Formeln von Seite 87 Bezug nehmend, an Stelle der pentasphärischen Coordinaten die *vier* Variabeln μ, ν, ϱ, σ einführen. Nun ist aber W homogen von $-\frac{1}{2}$-ter Dimension in $x_1, \ldots x_5$, und wir können deshalb schreiben:

$$W(\sqrt{\sigma} x_1, \sqrt{\sigma} x_2, \sqrt{\sigma} x_3, \sqrt{\sigma} x_4, \sqrt{\sigma} x_5) = \sigma^{-\frac{1}{4}} \cdot W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

und $\sqrt{\sigma} x, \ldots \sqrt{\sigma} x_5$ sind direct durch μ, ν, ϱ ausdrückbar. Wir können also setzen:

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sigma^{\frac{1}{4}} \cdot \psi(\mu, \nu, \varrho),$$

wo nun ψ einer partiellen Differentialgleichung in Bezug auf μ, ν, ϱ genügen wird, während für σ sein auf Seite 87 gefundener Werth gesetzt werden kann.

Die Ableitung dieser Gleichung für ψ könnte vermittelst der Formeln auf Seite 87 durch elementare Rechnungen geschehen. Um aber diese Rechnungen, welche sehr lang und mühsam sind, zu umgehen, geben wir unserem Probleme zunächst eine etwas andere Gestalt.

Wir wollen nämlich die Gleichung $\Sigma x_i^2 = 0$ als nicht bestehend ansehen. Dann ist die Gleichung:

---

*) Eine andere Darstellung der Theorie der Potentialformen, welche ebenfalls auf die Vorlesung von Herrn Klein über Lamé'sche Functionen zurückgeht, findet sich im Buche von Pockels „Ueber die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$" S. 197 ff. Wegen des Zusammenhanges dieser Theorie mit der Thomson'schen Methode der Inversion vergl. man die Originalabhandlung von Darboux und ebenfalls die Darstellung von Pockels.

$$\frac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - e_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0$$

eine Gleichung *vierten* Grades in λ, deren vier Wurzeln wir mit μ, ν, ϱ, $\varkappa$ bezeichnen wollen. Nun können wir $x_1, \ldots x_5$ bis auf einen Proportionalitätsfactor τ durch μ, ν, ϱ, $\varkappa$ ausdrücken mittelst der Formeln:

$$x_i^2 = \tau \frac{(\mu - e_i)(\nu - e_i)(\varrho - e_i)(\varkappa - e_i)}{f'(e_i)},$$

$$\tau = \sum_1^5 {}_i\, x_i^2,$$

wo wie früher gesetzt worden ist:

$$f(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)(\lambda - e_4)(\lambda - e_5).$$

Diese Formeln leiten wir ab durch eine Partialbruchzerlegung genau derselben Art, wie wir sie früher Seite 87 gebrauchten.

Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, in die Differentialgleichung:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0$$

an Stelle von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die fünf neuen Variablen μ, ν, ϱ, $\varkappa$, τ einzuführen. Dies können wir leicht thun mittelst eines Theorems, welches ganz allgemein für n Variable gilt*), und welches für fünf Variable folgendermassen lautet:

Wenn wir anstatt der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 fünf neue Variable

---

*) Dieser Satz, welcher im Wesentlichen schon Green bekannt war, wird meistens (z. B. von Lamé und Jacobi) für drei Variable gebraucht, wo er dann in folgende geometrische Form gesetzt wird:

Wenn wir anstatt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z krummlinige Coordinaten μ, ν, ϱ einführen, in welchen das Quadrat des Bogenelementes die Gestalt hat:

$$\left(\frac{d\mu}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{h_3}\right)^2$$

(d. h. wenn μ, ν, ϱ orthogonale Coordinaten sind), so nimmt die Potentialgleichung die Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right] + \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right] + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right] = 0.$$

In ähnlicher Weise könnten wir natürlich den Satz für fünf Variable aussprechen, falls wir die Variablen $x_1, \ldots x_5$ als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im Raume von fünf Dimensionen deuten wollten, und μ, ν, ϱ, $\varkappa$, τ als krummlinige Coordinaten in demselben Raume. In unserem Falle wären μ, ν, ϱ, $\varkappa$ die Parameter von vier Familien confocaler Kegel zweiten Grades und τ das Quadrat des Radius der mit ihnen concentrischen Kugeln.

μ, ν, ϱ, $\varkappa$, τ einführen, welche so beschaffen sind, dass der Differentialausdruck $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2$ in einen Ausdruck von der Form:

$$\left(\frac{d\mu}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{d\varkappa}{h_4}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{h_5}\right)^2$$

übergeht, so nimmt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0$$

die Form an:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{h_1}{h_2 h_3 h_4 h_5}\frac{\partial W}{\partial \mu}\right] + \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{h_2}{h_1 h_3 h_4 h_5}\frac{\partial W}{\partial \nu}\right] + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{h_3}{h_1 h_2 h_4 h_5}\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \varkappa}\left[\frac{h_4}{h_1 h_2 h_3 h_5}\frac{\partial W}{\partial \varkappa}\right] + \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{h_5}{h_1 h_2 h_3 h_4}\frac{\partial W}{\partial \tau}\right] = 0.$$

Um diesen Satz auf unser Problem anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass der Differentialausdruck:

$$D = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2$$

in der That in einen Ausdruck der vorbezeichneten Form übergeht*):

$$\left(\frac{d\mu}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{d\varkappa}{h_4}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{h_5}\right)^2.$$

Dies beweisen wir und berechnen zugleich die Ausdrücke $h_1, \ldots h_5$ durch ein der Rechnung von Seite 88 sehr ähnliches Verfahren. Differentiiren wir nämlich die oben stehenden Formeln, welche die x_i^2 durch μ, ν, ϱ, $\varkappa$, τ ausdrücken, logarithmisch, so bekommen wir fünf Formeln von der Gestalt:

$$2\,dx_i = \frac{x_i\,d\mu}{\mu - e_i} + \frac{x_i\,d\nu}{\nu - e_i} + \frac{x_i\,d\varrho}{\varrho - e_i} + \frac{x_i\,d\varkappa}{\varkappa - e_i} + \frac{x_i\,d\tau}{\tau}.$$

Wenn wir diese fünf Gleichungen quadriren und addiren, bekommen wir linker Hand $4D$, und es ist jetzt nur noch die Aufgabe, den Ausdruck rechter Hand auszurechnen.

Der Coefficient von $d\mu \cdot d\nu$ wird offenbar sein:

$$\sum_1^5{}_i \frac{2x_i^2}{(\mu - e_i)(\nu - e_i)} = \frac{2}{\nu - \mu}\left\{\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{\mu - e_i} - \sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{\nu - e_i}\right\}.$$

Da aber $\sum \frac{x_i^2}{\mu - e_i} = 0$ und $\sum \frac{x_i^2}{\nu - e_i} = 0$, so wird dieser ganze Ausdruck verschwinden. Auf genau dieselbe Weise sehen wir, dass der Coefficient des Productes von irgend zweien der Differentiale $d\mu$, $d\nu$,

*) D. h. wir müssen die Orthogonalität der krummlinigen Coordinaten im R_5 nachweisen.

$d\varrho$, $d\varkappa$ ebenfalls verschwindet; und auf ähnliche aber noch einfachere Weise, dass der Coefficient des Productes irgend eines dieser Differentiale mit $d\tau$ verschwindet.

Wir haben also nur die Coefficienten der Quadrate der Differentiale zu berechnen. Der Coefficient von $d\mu^2$ ist z. B.:

$$\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{(\mu - e_i)^2}.$$

Um hierin die x_i durch μ, ν, ϱ, $\varkappa$, τ zu ersetzen, schreiben wir:

$$\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = \frac{\tau \cdot \varphi(\lambda)}{f(\lambda)}$$

(wo $\varphi(\lambda) = (\mu - \lambda)(\nu - \lambda)(\varrho - \lambda)(\varkappa - \lambda)$ und $f(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)(\lambda - e_4)(\lambda - e_5)$), eine Gleichung, deren Richtigkeit mit leichter Mühe einzusehen ist, wenn man die Null- und Unendlichkeitsstellen beider Seiten bemerkt. Differentiiren wir hier nach λ, so bekommen wir die Gleichung:

$$\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{(\lambda - e_i)^2} = \frac{-\tau \cdot \varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\tau\varphi(\lambda) \cdot f'(\lambda)}{(f(\lambda)^2)}.$$

Setzen wir dann schliesslich $\lambda = \mu$, so bekommen wir:

$$\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{(\mu - e_i)^2} = \frac{-\tau\varphi'(\mu)}{f(\mu)} = \frac{\tau(\nu - \mu)(\varrho - \mu)(\varkappa - \mu)}{(\mu - e_1)(\mu - e_2)(\mu - e_3)(\mu - e_4)(\mu - e_5)},$$

eine Formel, welche durch cyclische Vertauschung von μ, ν, ϱ, $\varkappa$ auch die Coefficienten von $d\nu^2$, $d\varrho^2$, $d\varkappa^2$ liefert.

Der Coefficient von $d\tau^2$ ist, wie sofort zu sehen ist:

$$\frac{\sum_1^5{}_i x_i^2}{\tau^2} = \frac{1}{\tau}.$$

Wir bekommen also schliesslich als Resultat:

$$D = \frac{\tau(\nu - \mu)(\varrho - \mu)(\varkappa - \mu)}{4f(\mu)} d\mu^2 + \frac{\tau(\mu - \nu)(\varrho - \nu)(\varkappa - \nu)}{4f(\nu)} d\nu^2$$
$$+ \frac{\tau(\mu - \varrho)(\nu - \varrho)(\varkappa - \varrho)}{4f(\varrho)} d\varrho^2 + \frac{\tau(\mu - \varkappa)(\nu - \varkappa)(\varrho - \varkappa)}{4f(\varkappa)} d\varkappa^2 + \frac{1}{4\tau} d\tau^2.$$

Dieses Resultat wäre nun in die obige Form der Potentialgleichung einzusetzen. Wir ziehen es aber vor statt der Variablen μ, ν, ϱ, $\varkappa$ gewisse Functionen von ihnen in die Potentialgleichung einzuführen, wodurch letztere eine einfachere Gestalt gewinnen wird. *Diese neuen Variablen werden wir mit den Buchstaben u, v, w, s bezeichnen und als diejenigen Werthe definiren, welche das hyperelliptische Integral:*

$$t = \int \frac{d\lambda}{2\sqrt{f(\lambda)}}$$

annimmt, wenn die obere Grenze der Reihe nach die Werthe μ, ν, ϱ, $\varkappa$ *hat.* Unter Benutzung dieser Variablen können wir schreiben:

$$D = \tau(\nu - \mu)(\varrho - \mu)(\varkappa - \mu)du^2 + \tau(\mu - \nu)(\varrho - \nu)(\varkappa - \nu)dv^2$$
$$\tau(\mu - \varrho)(\nu - \varrho)(\varkappa - \varrho)dw^2 + \tau(\mu - \varkappa)(\nu - \varkappa)(\varrho - \varkappa)ds^2$$
$$+ \frac{1}{4\tau} d\tau^2.$$

Wir haben hiermit in dem Ausdrucke:

$$D = \left(\frac{du}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{dw}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{ds}{h_4}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{h_5}\right)^2$$

die Werthe der h wirklich berechnet. Indem wir jetzt bemerken, dass die Quotienten $\frac{h_1}{h_2 h_3 h_4 h_5}$, $\frac{h_2}{h_1 h_3 h_4 h_5}$, ... bezw. von den Variablen μ, ν, ... (oder was dasselbe ist u, v, ...) unabhängig sind, sehen wir, dass wir die transformirte Differentialgleichung in folgender einfacher Form schreiben können:

$$\frac{1}{(\nu - \mu)(\varrho - \mu)(\varkappa - \mu)} \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{1}{(\mu - \nu)(\varrho - \nu)(\varkappa - \nu)} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$$
$$+ \frac{1}{(\mu - \varrho)(\nu - \varrho)(\varkappa - \varrho)} \frac{\partial^2 W}{\partial w^2} + \frac{1}{(\mu - \varkappa)(\nu - \varkappa)(\varrho - \varkappa)} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + 4\tau^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}$$
$$+ 10\tau \frac{\partial W}{\partial \tau} = 0.$$

Nun soll aber W homogen vom $-\frac{1}{2}$-ten Grade in $x_1, \ldots x_5$ sein*). Wir können also schreiben:

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \tau^{-\frac{1}{4}} \cdot W\left(\frac{x_1}{\sqrt{\tau}}, \frac{x_2}{\sqrt{\tau}}, \frac{x_2}{\sqrt{\tau}}, \frac{x_4}{\sqrt{\tau}}, \frac{x_5}{\sqrt{\tau}}\right)$$
$$= \tau^{-\frac{1}{4}} \cdot \varphi(\mu, \nu, \varrho, \varkappa).$$

Indem wir diesen Ausdruck für W in die oben stehende Differentialgleichung einsetzen, bekommen wir als Differentialgleichung für φ:

$$\frac{1}{(\nu - \mu)(\varrho - \mu)(\varkappa - \mu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{1}{(\mu - \nu)(\varrho - \nu)(\varkappa - \nu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$
$$+ \frac{1}{(\mu - \varrho)(\nu - \varrho)(\varkappa - \varrho)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + \frac{1}{(\mu - \varkappa)(\nu - \varkappa)(\varrho - \varkappa)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{5}{4} \varphi = 0.$$

---

*) Wir beschränken uns also im Raume von fünf Dimensionen auf Kugelfunctionen $-\frac{1}{2}$-ten Grades, um die Ausdrucksweise des *Appendix B* der „Natural Philosophy“ von Thomson und Tait zu gebrauchen. Die Function φ, deren Differentialgleichung wir sofort ableiten, ist dann natürlich eine beliebige Kugelflächenfunction $-\frac{1}{2}$-ten Grades im Raume von fünf Dimensionen.

Soll schliesslich die Relation $\Sigma x_i^2 = 0$ befriedigt werden, so wird:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$$

vom *dritten* Grade in λ, oder in anderen Worten: eine ihrer vier Wurzeln (etwa $\varkappa$) wird unendlich. In den Formeln also, welche die x_i mit μ, ν, ϱ, $\varkappa$ verbinden (vergl. S. 141), verschwindet der Proportionalitätsfactor $\tau = \Sigma x_i^2$, während die Grössen $\varkappa - e_i$ unendlich werden. Wir fassen diese zwei Factoren also zu einem neuen endlichen Proportionalitätsfactor zusammen, indem wir schreiben:

$$\text{limes } (\varkappa \tau) = \frac{1}{\sigma}.$$

Hierdurch bekommen wir gerade die Formeln von Seite 87 für die allgemeinen cyclidischen Coordinaten.

Nun wollten wir aber setzen (vergl. Seite 140):

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sigma^{\frac{1}{4}} \cdot \psi(\mu, \nu, \varrho).$$

Wir werden also die bis jetzt beliebige Lösung φ auf folgende specielle Gestalt beschränken wollen:

$$\varphi(\mu, \nu, \varrho, \varkappa) = \sigma^{\frac{1}{4}} \cdot \tau^{\frac{1}{4}} \cdot \psi(\mu, \nu, \varrho) = \varkappa^{-\frac{1}{4}} \cdot \psi(\mu, \nu, \varrho).$$

Diese ψ haben wir dann statt φ in die oben stehende Differentialgleichung einzuführen und endlich $\varkappa$ unendlich werden zu lassen.

Einerseits ist nun:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 4 \sqrt{f(\varkappa)} \frac{\partial}{\partial \varkappa}\left[\sqrt{f(\varkappa)} \frac{\partial (\varkappa^{\frac{1}{4}} \cdot \psi)}{\partial \varkappa}\right] = \left[\frac{5}{4} \varkappa^{-1} \cdot f(\varkappa) - \frac{1}{2} f'(\varkappa)\right] \varkappa^{-\frac{5}{4}} \cdot \psi.$$

Indem wir andererseits $\frac{1}{(\mu - \varkappa)(\nu - \varkappa)(\varrho - \varkappa)}$ in der Nähe des Punktes $\varkappa = \infty$ entwickeln, bekommen wir die Reihe:

$$-\frac{1}{\varkappa^3} - \frac{\mu + \nu + \varrho}{\varkappa^4} + \cdots.$$

Es ist also:

$$\frac{1}{(\mu - \varkappa)(\nu - \varkappa)(\varrho - \varkappa)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$$

$$= \left[\frac{5}{4} \varkappa + \frac{5}{4} (\mu + \nu + \varrho) - \frac{3}{4} \sum_1^5 {}_i e_i + A_1 \varkappa^{-1} + A_2 \varkappa^{-2} + \cdots\right] \varkappa^{-\frac{5}{4}} \cdot \varphi.$$

Hieraus sieht man, dass die Gleichung für ψ, wenn $\varkappa = \infty$ gesetzt wird, folgendermassen lautet*):

---

*) Diese Gleichung wurde bereits von Wangerin, Crelle Bd. 82, 1876 abgeleitet; Darboux hat dieselbe nur mit der Geometrie der reciproken Radien in die im Texte dargelegte Verbindung gebracht.

$$\frac{1}{(\nu-\mu)(\varrho-\mu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{1}{(\mu-\nu)(\varrho-\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+\frac{1}{(\mu-\varrho)(\nu-\varrho)}\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}$$
$$+\left[\frac{5}{4}(\mu+\nu+\varrho)-\frac{3}{4}\sum_1^5{}_i\, e_i\right]\psi=0.$$

Zum Schlusse können wir noch das Gesammtresultat dieses Paragraphen in folgendem Satze zusammenfassen, wenn wir $\frac{1}{\sigma}$ durch den Werth $\sum_1^5{}_i\, e_i x_i^2$ *) ersetzt denken, und zugleich der Einfachheit halber die Zwischenstufe der Potentialformen W ganz überspringen:

Will man das Potential in cyclidischen Coordinaten beherrschen, so setze man:

$$V=\left(\frac{\sum_1^5{}_i\,\frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5{}_i\, e_i x_i^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\psi(\mu,\ \nu,\ \varrho).$$

Dann genügt ψ der Differentialgleichung:

$$(\varrho-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+(\mu-\varrho)\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+(\nu-\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}$$
$$+(\mu-\nu)(\nu-\varrho)(\varrho-\mu)\left[\frac{5}{4}(\mu+\nu+\varrho)-\frac{3}{4}\sum_1^5{}_i\, e_i\right]\cdot\psi=0,$$

unter u, v, w die Werthe verstanden, welche das hyperelliptische Integral:

$$t=\int\frac{d\lambda}{2\sqrt{(\lambda-e_1)\cdots(\lambda-e_5)}}$$

für $\lambda=\mu,\ \nu,\ \varrho$ als obere Grenze annimmt.

§ 3. Ueber die Befriedigung der Potentialgleichung durch Lamé'sche Producte.

Jetzt fragen wir uns, und dieser Gedanke ist für die weiter darzulegende *Methode der mathematisch-physikalischen Reihenentwickelungen* fundamental, ob wir eine ψ-Function, welche der partiellen Differential-

*) Allerdings wissen wir (vergl. S. 87), dass:

$$\frac{1}{\sigma}=-\sum_1^5{}_i\, e_i x_i^2;$$

indem wir aber das Minuszeichen weglassen, multipliciren wir unser Potential einfach mit einer Constante, wodurch das Resultat nicht geändert wird.

gleichung des vorigen Paragraphen genügt, und also nach Multiplication mit dem Factor:

$$T = \left(\frac{\sum_1^5 i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 i\, e_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein Potential liefert, von folgender Form finden können:

$$\psi(\mu, \nu, \varrho) = E'(\mu) \cdot E''(\nu) \cdot E'''(\varrho),$$

(d. h. eine ψ-Function, in welcher die drei Variablen μ, ν, ϱ getrennt resp. auf die drei verschiedenen Factoren vertheilt sind). Ein solches ψ wollen wir ein *Lamé'sches Product* nennen, denn gerade diese Art von Fragestellung ist der Ausgangspunkt von Lamé gewesen.

Um nun diese Frage zu entscheiden, setze man das oben geschriebene Lamé'sche Product in die Differentialgleichung für ψ ein. Hiernach nimmt letztere folgende Gestalt an:

$$\frac{\varrho - \nu}{E'(\mu)} \frac{\partial^2 E'(\mu)}{\partial u^2} + \frac{\mu - \varrho}{E''(\nu)} \frac{\partial^2 E''(\nu)}{\partial v^2} + \frac{\nu - \mu}{E'''(\varrho)} \frac{\partial^2 E'''(\varrho)}{\partial w^2}$$

$$+ (\mu - \nu)(\nu - \varrho)(\varrho - \mu) \left[\frac{5}{4} (\mu + \nu + \varrho) - \frac{3}{4} \sum_1^5 i\, e_i \right] = 0.$$

Indem wir jetzt folgende Identitäten ins Auge fassen:

$$(\varrho - \nu) + (\mu - \varrho) + (\nu - \mu) \equiv 0,$$
$$\mu\, (\varrho - \nu) + \nu\, (\mu - \varrho) + \varrho\, (\nu - \mu) \equiv 0,$$
$$\mu^2 (\varrho - \nu) + \nu^2 (\mu - \varrho) + \varrho^2 (\nu - \mu) \equiv (\mu - \nu)(\nu - \varrho)(\varrho - \mu),$$
$$\mu^3 (\varrho - \nu) + \nu^3 (\mu - \varrho) + \varrho^3 (\nu - \mu) \equiv (\mu - \nu)(\nu - \varrho)(\varrho - \mu)(\mu + \nu + \varrho),$$

erkennen wir, dass die vorstehende Gleichung befriedigt wird, wenn die Functionen E', E'', E''' so bestimmt werden, dass $E'(\lambda)$, $E''(\lambda)$, $E'''(\lambda)$ irgend welche drei Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \left[-\frac{5}{4} \lambda^3 + \frac{3}{4} \left(\sum_1^5 i\, e_i \right) \lambda^2 + A\lambda + B \right] \cdot E$$

sind, wo A und B willkürlich zu wählende Constanten bedeuten, die aber für die drei Functionen E', E'', E''' dieselben sein müssen. Diese Differentialgleichung stimmt aber ohne Weiteres mit Gleichung (3) Seite 117 überein, sofern wir nur in letzterer $n = 5$ setzen. Wir gewinnen also folgenden Satz:

Wir können ein Lamé'sches Product bilden, indem wir die drei

Factoren desselben als irgendwelche Lamé'sche Functionen annehmen, die Particularlösungen einer und derselben Lamé'schen Gleichung $n = 5$ sind, welche die Punkte $e_1, \ldots e_5$ als einfache singuläre Punkte besitzt. Die accessorischen Parameter A, B der Lamé'schen Gleichung sind dabei keinerlei Beschränkungen unterworfen.

Wir haben so Potentialfunctionen von der Form gewonnen:

$$V = \left\{ \frac{\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}_i e_i x_i^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot E'(\mu) \cdot E''(\nu) \cdot E'''(\varrho),$$

oder aber wenn wir die drei Functionen E', E'', E''' aus zwei linear unabhängigen Particularlösungen der Lamé'schen Gleichung zusammensetzen:

$$V = T \cdot (L' E_1(\mu) + M' E_2(\mu)) \cdot (L'' E_1(\nu) + M'' E_2(\nu)) \cdot (L''' E_1(\varrho) + M''' E_2(\varrho)).$$

Ein solches Potential werden wir als ein Lamé'sches Product, oder falls wir auf das Vorhandensein des Factors T aufmerksam machen wollen, als ein verallgemeinertes Lamé'sches Product bezeichnen. Dabei scheint die Cyclide $\Sigma e_i x_i^2 = 0$, welche in der Cyclidenschaar $\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$ dem Parameterwerthe $\lambda = \infty$ entspricht, bevorzugt zu sein. Nun wissen wir aber, dass jedenfalls geometrisch diese Cyclide keineswegs ausgezeichnet ist, sondern dass man bei gegebener Flächenschaar den Parameter λ auf dreifach unendlich viele Weisen einführen und insbesondere irgend welche Cyclide der Schaar dem Werthe $\lambda = \infty$ zuordnen kann. In der That ist die Bevorzugung der Cyclide $\Sigma e_i x_i^2 = 0$ in unserer Formel nur eine scheinbare, und es hängt dies damit zusammen, dass wir bei unserer unhomogenen Definition der Lamé'schen Functionen den Punkt $\lambda = \infty$ ausgezeichnet haben. Wir erkennen dies sofort, indem wir homogen machend $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ schreiben und dann statt der Lamé'schen Functionen Lamé'sche *Formen* einführen (K). In der That, machen wir die cyclidischen Coordinaten homogen, indem wir schreiben:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \varrho = \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$

so können wir unsere Potentialfunction in folgender Gestalt schreiben:

$$V = \left(\sum_1^5 {}^i \frac{x_i}{R_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_2 \nu_2 \varrho_2}{\sum_1^5 {}^i e_i x_i^2} \right)^{\frac{1}{4}} F'(\mu_1, \mu_2) \cdot F''(\nu_1, \nu_2) \cdot F'''(\varrho_1, \varrho_2).$$

Nun haben wir nur folgende Identität zu Hülfe zu nehmen, deren Richtigkeit mit leichter Mühe einzusehen ist:

$$\sum_1^5 {}^i \frac{x_i^2}{\lambda_1 - e_i \lambda_2} = \frac{|\lambda \mu| \cdot |\lambda \nu| \cdot |\lambda \varrho| \cdot \lambda_2}{f(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \mu_2 \cdot \nu_2 \cdot \varrho_2} \sum_1^5 {}^i e_i x_i^2,$$

(wo $|\lambda \mu|$, $|\lambda \nu|$, $|\lambda \varrho|$ in bekannter Weise für die entsprechenden zweigliedrigen Determinanten gesetzt sind, z. B. $|\lambda \mu|$ für $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$). Hierdurch bekommen wir nämlich als Ausdruck für unsere Potentialfunction:

$$V = \left(\sum_1^5 {}^i \frac{x_i}{R_i} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{|\lambda \mu| \cdot |\lambda \nu| \cdot |\lambda \varrho| \cdot \lambda_2}{f(\lambda_1, \lambda_2) \sum_1^5 {}^i \frac{x_i^2}{\lambda_1 - e_i \lambda_2}} \right)^{\frac{1}{4}} F'(\mu_1, \mu_2) \cdot F''(\nu_1, \nu_2) \cdot F'''(\varrho_1, \varrho_2),$$

wo nun λ_1, λ_2 als Grössen, welche nur formal auftreten, irgend welche Werthe haben können, so dass thatsächlich, ohne dass an V irgend etwas geändert wäre, eine beliebige Cyclide $\sum \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$ der Schaar ebenso als ausgezeichnet erscheint, wie vorhin die Cyclide $\Sigma e_i x_i^2 = 0$.

Kapitel 4.

Ueber die Benutzung der Lamé'schen Producte in den Reihenentwickelungen der Potentialtheorie.

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, wie wir allgemein mit Hülfe Lamé'scher Functionen Potentiale bilden können. Dieselben, welche wir als verallgemeinerte Lamé'sche Producte bezeichnet haben, hatten die Form:

$$T \cdot (L' E_1(\mu) + M' E_2(\mu)) \cdot (L'' E_1(\nu) + M'' E_2(\nu)) \cdot (L''' E_1(\varrho) + M''' E_2(\varrho)),$$

in welcher T eine nach Festlegung des Coordinatensystems völlig bestimmte Function des Ortes bedeutet, L', M', ... M''' willkürliche Constanten sind, und die Lamé'schen Functionen E implicite von zwei weiteren noch unbestimmten Constanten abhängen, welche in der zugehörigen Lamé'schen Gleichung als accessorische Parameter auftreten. Natürlich vereinigen sich die L', M', ... bei der Multiplication zu

nur vier Constanten. Nun werden wir aber weiterhin zwischen solchen Producten nicht unterscheiden, die nur um einen constanten Factor differiren. Wir können daher sagen (indem wir die beiden accessorischen Parameter mitzählen):

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, für jedes allgemeine System cyclidischer Coordinaten ∞^5 *Potentiale in der Form verallgemeinerter Lamé'scher Producte zu bilden.*

Nun entsprechen diese Potentiale an sich keinen besonders einfachen oder wichtigen physikalischen Fragestellungen. Wir können aber aus ihnen allgemeinere Potentiale durch Addition zusammensetzen, und *diese sind es, durch deren Betrachtung die in der Einleitung besprochene Randwerthaufgabe zur Lösung gebracht werden kann.* Wir führen dies gleich genauer aus.

Die Bedeutung der Lamé'schen Functionen für die Potentialtheorie liegt darin, dass man aus den oben erwähnten ∞^5 *Potentialen* ∞^2 *(welche eine discrete Reihenfolge bilden) derart auswählen kann, dass die Doppelsumme, welche man aus diesen* ∞^2 *Producten nach Zufügung je eines geeigneten Coefficienten zu den einzelnen Producten zusammensetzen kann, unsere Randwerthaufgabe für einen durchaus rechtwinkligen Körper löst, welcher von irgend welchen sechs Flächen des Coordinatensystems begrenzt ist.*

Den hiermit bezeichneten Gedanken ins Einzelne durchzuführen, ist der Zweck dieses Kapitels.

§ 1. Ueber eine schematische Bezeichnung des allgemeinen Cyclidensechsflachs und über die zu diesem Sechsflach gehörigen Lamé'schen Producte.

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Körpern beschäftigen, die von sechs allgemeinen confocalen Cycliden durchaus rechtwinklig *) begrenzt sind, und die wir der Kürze halber als allgemeine *Cyclidensechsflache* bezeichnen werden. Die Begrenzungsflächen eines solchen Körpers mögen durch Stücke folgender Cyclidenflächen gebildet werden:

$$\mu = m_1, \quad \mu = m_2, \quad \nu = n_1, \quad \nu = n_2, \quad \varrho = r_1, \quad \varrho = r_2.$$

Hierdurch sind nun zwar die Begrenzungsflächen des Körpers festgelegt, aber der Körper selbst ist noch nicht vollständig definirt,

---

*) Durch den Ausdruck *durchaus rechtwinklig* deuten wir an, dass der Winkel von einer Seitenfläche zur anderen durch das Innere des Körpers gemessen 90° (nicht 270°) betragen soll. So wird z. B. der ganze Raum durch die sechs Flächen eines Würfels in zwei Theile getheilt; der eine, endliche, ist durchaus rechtwinklig, der andere, unendliche, aber nicht.

vielmehr müssen wir noch wissen, wie sich derselbe zwischen diesen Seitenflächen erstreckt. Dieses wollen wir nun mit Hülfe geeigneter Schemata anschaulich zu machen versuchen.

Denken wir uns zunächst unseren Körper in der Gestalt eines nur wenig verzerrten rechtwinkligen Parallelepepidons, welches keine der Symmetriekugeln des Cyclidensystems durchsetzt oder auch nur erreicht. Einen solchen einfachen Körper können wir offenbar in den zwei allgemeinen Fällen I′a) und I″a), mit welchen wir uns allein in diesem Abschnitte beschäftigen, durch die nebenstehenden Schemata charakterisiren. Dieselben sind so zu verstehen, dass wir zunächst den Endpunkten m_1, n_1, r_1 einen bestimmten der 16 bezw. 8 reellen Raumpunkte zuordnen, die überhaupt dem genannten Punktetripel entsprechen, und nun verabreden, dass wir von hier aus durch Continuität weiter gehen wollen. In der That ist ersichtlich, dass einem Punkttripel, dessen einzelne Punkte in den Segmenten $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ liegen, auf diese Weise ein einziger Raumpunkt entsprechen wird, von dem dann angenommen werden soll, dass er innerhalb des betreffenden Körpers liegt.

Jetzt wollen wir unseren Körper eine etwas complicirtere Gestalt annehmen lassen. Denken wir uns, dass der anfänglich nahezu würfelförmige Körper sich in einer Richtung verlängert, indem etwa der Punkt m_1 des Schemas sich dem Punkte e_5 nähert (während die anderen fünf Punkte m_2, n_1, n_2, r_1, r_2, und folglich auch die entsprechenden Seitenflächen des Körpers, zunächst noch fest bleiben). Ist schliesslich der Punkt m_1 bis zum Punkte e_5 gekommen, so wird sich unser Körper gerade bis zur entsprechenden eintheiligen Symmetriekugel erstrecken. Wollen wir nun aber den Körper in gleicher Richtung noch weiter wachsen lassen (so dass er also die Symmetriekugel durchdringt), so wird der Punkt m_1 offenbar auf seinem Wege umkehren müssen und das Segment $m_1 m_2$ unseres Schemas wird dann, indem es sich im Punkte e_5 umbiegt, das Intervall $e_4 e_5$ zum Theil mehrfach überdecken. Nichts hindert den Verlängerungsprocess beliebig weiter gehen zu lassen, wobei sich das Segment $m_1 m_2$ beliebig oft um das Intervall $e_4 e_5$ herumwickeln wird. Hierdurch wird allerdings unser Körper vorkommenden Falls gewisse Theile des Raumes mehrfach erfüllen*), aber dies ist eine Möglichkeit, welche wir nicht

*) Wenn man in der Ebene mit einem Flächenstück zu thun hat, welches gewisse Theile der Ebene mehrfach überdeckt, so pflegt man dasselbe nicht in

auszuschliessen brauchen, da sie in unsere Betrachtung keine wirkliche Complication einführen wird.

Das hiermit geschilderte Verfahren, welches wir nur erst bei der einen Seitenfläche unseres Körpers in Anwendung brachten, können wir nun ersichtlich gleichzeitig in Bezug auf die anderen Seitenflächen des Körpers wiederholen und kommen so auf den Satz:

Das allgemeine Cyclidensechsflach wird durch ein Schema charakterisirt, welches aus drei Segmenten $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ besteht, die bezw. in den Intervallen μ, ν, ϱ der reellen λ-Axe liegen, aber diese Intervalle, oder Theile derselben, beliebig oft überdecken können.

Die verschiedenen Gestalten, welche das allgemeine Cyclidensechsflach annehmen kann, wollen wir hier der Kürze halber nicht näher besprechen, verweisen vielmehr auf III, 3, § 1, wo diese verschiedenen Gestalten leicht vorstellbar werden, trotzdem es sich dort eigentlich nur um ausgeartete Fälle handelt. Selbstverständlich können diese Cyclidensechsflache ebensogut durch den unendlich weiten Raumpunkt hindurchgehen wie durch irgend einen anderen Punkt. Das macht, vermöge der Auffassungsweise der Geometrie der reciproken Radien, überhaupt keinen Unterschied. Ebenso dürfen die Segmente der λ-Axe sich beliebig durch den Punkt $\lambda = \infty$ hindurchziehen. Nur der Einfachheit unserer Darstellung halber werden wir hier, wie in Kapitel 2 dieses Abschnittes, voraussetzen, dass dies nicht der Fall ist.

Aus Gründen, welche wir im nächsten Paragraphen näher erläutern werden, wollen wir jetzt ein Lamé'sches Product, welches auf fünf Seitenflächen eines Cyclidensechsflachs verschwindet, als zu dem Sechsflach *gehörend* bezeichnen. Wir sehen sofort, dass die Lamé'schen Functionen (bezw. Formen), aus welchen sich diese „zugehörigen" Lamé-schen Producte zusammensetzen, geradezu durch das Oscillationstheorem von Kapitel 2 dieses Abschnittes zu bestimmen sind. Fassen wir z. B. ein Lamé'sches Product ins Auge, welches auf den Seitenflächen m_1, m_2, n_1, n_2, r_1 verschwinden soll. Die drei Factoren dieses Productes wollen wir mit $E'(\mu)$, $E''(\nu)$, $E'''(\varrho)$ bezeichnen. Da ist zunächst jedenfalls Folgendes klar: Was auch die Werthe der accessorischen Parameter sein mögen, welche in der zu diesen Lamé'schen Functionen

die schlichte Ebene, sondern in eine Riemann'sche Fläche gelegt zu denken, wo dann die einander vorher durchdringenden Theile des Flächenstückes in verschiedenen Blättern liegen. Aehnliches kann man sich auch hier vorstellen, indem man sich „Riemann'sche Räume" construirt. Das Studium von Potentialen, welche in gegebenen Riemann'schen Räumen eindeutig sind, bildet eine naheliegende Erweiterung des Studiums der Potentiale, welche im schlichten Raume eindeutig sind.

gehörigen Differentialgleichung auftreten, so können wir die Particularlösungen E', E'', E''' sicher so auswählen, dass sie bezw. in den Punkten m_1, n_1, r_1 der λ-Axe verschwinden. Dann aber können wir mittelst des Oscillationstheorems die accessorischen Parameter so bestimmen, dass die Zweige E' bezw. E'' in den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ genau m bezw. n Halboscillationen ausführen; wir werden dies fortan dadurch andeuten, dass wir anstatt wie früher (S. 131) $E(\lambda; a, b)$ zu schreiben, die Oscillationszahlen m, n direct in der Bezeichnung einführen und schreiben $E_{m,n}(\lambda)$. Unser Lamé'sches Product lautet also:

$$E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\varrho),$$

und wir sehen sofort, dass dieses Product wirklich auf den fünf Seitenflächen m_1, m_2, n_1, n_2, r_1 des Körpers verschwindet. Indem wir nun hier den Oscillationszahlen m, n der Reihe nach alle ganzzahligen positiven Werthe beilegen, bekommen wir die sämmtlichen Lamé'schen Producte, welche auf den fünf genannten Seitenflächen verschwinden. Offenbar hätten wir nur die Particularlösung E''' in anderer Weise auszusuchen brauchen (nämlich so, dass sie im Punkte r_2 anstatt im Punkte r_1 verschwindet), um alle Lamé'schen Producte zu haben, die auf den fünf Seitenflächen m_1, m_2, n_1, n_2, r_2 verschwinden. Hätten wir andererseits das Oscillationstheorem auf die Segmente $m_1 m_2$ und $r_1 r_2$ bezw. $n_1 n_2$ und $r_1 r_2$ in Anwendung gebracht, so würden wir bei geschickter Auswahl der Particularlösungen sämmtliche Lamé'sche Producte erhalten haben, welche auf fünf anderen Seitenflächen unseres Körpers verschwinden. Damit haben wir aber die Gesammtheit der zum Körper gehörigen Producte wirklich gebildet*).

Durch diese Producte werden wir jetzt im nächsten Paragraphen unsere Randwerthaufgabe lösen.

---

*) Indem wir bedenken, dass es kein nicht identisch verschwindendes Potential geben kann, welches auf allen sechs Seitenflächen eines Cyclidensechsflachs verschwindet (sogar wenn Theile des Raumes durch das Cyclidensechsflach mehrfach erfüllt sind), werden wir auf folgendes Theorem geführt, welches ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes ist, welches Klein als „Ergänzungstheorem" bezeichnet:

Sind die accessorischen Parameter einer Lamé'schen Gleichung $n = 5$ durch Anwendung des Oscillationstheorems auf solche Segmente, welche in zwei benachbarten Intervallen liegen, bestimmt, so kann dieselbe keine Particularlösung besitzen, welche in einem der zwei benachbarten Intervalle mehr wie einmal verschwindet, so oft man dieselbe auch über das Intervall hin und her verfolgen mag.

Oder noch allgemeiner:

Eine Lamé'sche Gleichung $n = 5$ kann niemals drei Particularlösungen besitzen, welche bezw. in drei nebeneinanderliegenden Intervallen oscilliren.

Dieses Theorem könnte man natürlich gerade so ableiten wie das Oscillationstheorem selber, wenn die Curve C_3 (vergl. S. 126) nicht vorhanden wäre.

§ 2. Lösung der auf allgemeine Cyclidensechsflache bezüglichen Randwerthaufgabe.

Das allgemeine Problem der Randwerthaufgabe für unser Cyclidensechsflach, zu dessen Betrachtung wir uns jetzt wenden, können wir von vornherein, wie dies bei derartigen Aufgaben üblich ist, in sechs einfachere Randwerthaufgaben spalten, indem wir jeweils das Potential auf nur einer der sechs Begrenzungsflächen beliebig gegeben denken, auf den anderen fünf aber als Werth des Potentials gleichförmig Null vorschreiben. Die Summe der sechs so definirten Potentiale wird offenbar dasjenige gesuchte Potential sein, welches auf allen sechs Seitenflächen des Körpers beliebig vorgeschriebene Werthe annimmt.

Wir wollen uns also auf eins dieser Einzelprobleme bschränken, etwa, um die Ideen zu fixiren, auf dasjenige, bei welchem das Potential auf der Begrenzungsfläche $\varrho = r_2$ die willkürlich vorzugebenden Werthe $F(\mu, \nu)$ anzunehmen hat, auf den anderen fünf Flächen aber verschwinden soll.

Nun haben wir aber schon zu Anfang dieses Kapitels gesagt, dass wir das gesuchte Potential in der Form einer Doppelsumme bilden wollen, deren Glieder den gemeinschaftlichen Factor besitzen:

$$T = \left(\frac{\sum_1^5 {}^i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}^i e_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir können daher von vornherein diesen Factor abtrennen und uns *nach einer Function ψ *) fragen, welche auf der Seitenfläche $\varrho = r_2$ die beliebig vorzuschreibenden Werthe:*

$$f(\mu, \nu) = \frac{F(\mu, \nu)}{T}$$

annimmt, auf den anderen fünf Begrenzungsflächen verschwindet, und innerhalb des Körpers eindeutig und nebst ihren ersten Differentialquotienten stetig verläuft.

Wir haben die Producte:

$$E'_{m,\,n}(\mu) \cdot E''_{m,\,n}(\nu) \cdot E'''_{m,\,n}(\varrho)$$

*) D. h. eine Function, welche der partiellen Differentialgleichung von Seite 146 genügt. Dieser Gleichung braucht natürlich nur *innerhalb* des Körpers genügt zu werden.

im vorigen Paragraphen bereits so eingeführt, dass sie die gesammten Bedingungen sämmtlich erfüllen bis auf die auf die Seitenfläche $\varrho = r_2$ bezügliche, und dasselbe gilt also auch von jeder linearen Verbindung beliebig vieler solcher Producte, jedenfalls so lange dieselbe nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Nun werden wir hier so verfahren, wie es in ähnlichen Fällen seit lange üblich ist, dass wir nämlich von der endlichen Summe zu einer unendlichen Reihe übergehen, welche zunächst unbestimmte Coefficienten besitzt, und dann versuchen diese Coefficienten so zu bestimmen, dass auch die Grenzbedingung auf der sechsten Seitenfläche befriedigt wird. Wir sagen: *Um die Lösung der vereinfachten Randwerthaufgabe zu bekommen, brauchen wir nur in der Reihenentwickelung:*

$$\psi = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n A_{m,\,n} \cdot E'_{m,\,n}(\mu) \cdot E''_{m,\,n}(\nu) \cdot E'''_{m,\,n}(\varrho)$$

die Coefficienten $A_{m,\,n}$ so zu bestimmen, dass folgende Formel gilt:

$$f(\mu,\ \nu) = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n A_{m,\,n} \cdot E'''_{m,\,n}(r_2) \cdot E'_{m,\,n}(\mu) \cdot E''_{m,\,n}(\nu).$$

Wir setzen jetzt:

$$A_{m,\,n} \cdot E'''_{m,\,n}(r_2) = B_{m,\,n},$$

und haben dann als unsere nächste Aufgabe die Berechnung der Coefficienten der Reihenentwickelung:

$$f(\mu,\ \nu) = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n B_{m,\,n} \cdot E'_{m,\,n}(\mu) \cdot E''_{m,\,n}(\nu).$$

Hierbei verfahren wir auch wieder in herkömmlicher Weise, ohne die Zulässigkeit des Verfahrens weiter in Untersuchung zu ziehen. Wir multipliciren nämlich die obenstehende Reihe mit dem Ausdrucke:

$$(\mu - \nu) \cdot E'_{m,\,n}(\mu) \cdot E''_{m,\,n}(\nu) \cdot du \cdot dv$$

(wo u und v die schon öfters benutzten hyperelliptischen Integrale bezeichnen sollen), und integriren jedes einzelne Glied der so entstehenden Gleichung über diejenigen Segmente der u- und v-Axe, welche den Segmenten $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ der Intervalle μ und ν der λ-Axe entsprechen. Hierbei entstehen rechter Hand unendlich viele Glieder von der Form:

$$\iint (\mu - \nu) E'_{m,\,n}(\mu) \cdot E''_{m,\,n}(\nu) \cdot E'_{\bar{m},\,\bar{n}}(\mu) \cdot E''_{\bar{m},\,\bar{n}}(\nu) \cdot du \cdot dv\,,$$

und nun behaupten wir, *dass alle diese Glieder wegfallen mit Ausnahme des einen, für welches* $m = \bar{m}$ *und* $n = \bar{n}$. Um dies zu beweisen, schreiben wir die Differentialgleichungen der verschiedenen hier in Betracht kommenden Lamé'schen Functionen in folgender Gestalt hin:

$$\frac{d^2 E'_{m,n}(\mu)}{du^2} = \left[-\frac{f''(\mu)}{16} + a\mu + b\right] \cdot E'_{m,n}(\mu),$$

$$\frac{d^2 E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu)}{du^2} = \left[-\frac{f''(\mu)}{16} + \bar{a}\mu + \bar{b}\right] \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu),$$

$$\frac{d^2 E''_{m,n}(\nu)}{dv^2} = \left[-\frac{f''(\nu)}{16} + a\nu + b\right] \cdot E''_{m,n}(\nu),$$

$$\frac{d^2 E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu)}{dv^2} = \left[-\frac{f''(\nu)}{16} + \bar{a}\nu + \bar{b}\right] \cdot E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu).$$

Indem wir nun die erste dieser Gleichungen mit $E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu)$, die zweite mit $E'_{m,n}(\mu)$ multipliciren und von einander subtrahiren, bekommen wir:

$$E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot \frac{d^2 E'_{m,n}(\mu)}{du^2} - E'_{m,n}(\mu) \cdot \frac{d^2 E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu)}{du^2}$$

$$= \left[(a-\bar{a})\mu + (b-\bar{b})\right] E'_{m,n}(\mu) \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu).$$

Es ist aber der hier linker Hand stehende Ausdruck einfach gleich:

$$\frac{d}{du}\left[E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot \frac{dE'_{m,n}(\mu)}{du} - E'_{m,n}(\mu) \cdot \frac{dE'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu)}{du}\right].$$

Wenn wir also die Gleichung mit du multipliciren und über das Segment $m_1 m_2$ integriren, verschwindet die linke Seite der Gleichung, insofern doch $E'_{m,n}(\mu)$ und $E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu)$ selber in den beiden Integrationsgrenzen verschwinden. Wir bekommen also die Gleichung:

$$(a-\bar{a})\int \mu E'_{m,n}(\mu) \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot du + (b-\bar{b})\int E'_{m,n}(\mu) \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot du = 0.$$

Aus den dritten und vierten der obenstehenden Lamé'schen Gleichungen bekommen wir auf ähnliche Weise die Gleichung:

$$(a-\bar{a})\int \nu E''_{m,n}(\nu) \cdot E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu) \cdot dv + (b-\bar{b})\int E''_{m,n}(\nu) \cdot E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu) \cdot dv = 0.$$

Wir sehen hieraus, dass mit Ausnahme des Falles $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$ (d. h. $m = \bar{m}$, $n = \bar{n}$) folgende Determinante nothwendig verschwindet:

$$\int \mu E'_{m,n}(\mu) \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot du \cdot \int E''_{m,n}(\nu) \cdot E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu) \cdot dv$$

$$- \int E'_{m,n}(\mu) \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot du \cdot \int \nu E''_{m,n}(\nu) \cdot E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu) \cdot dv.$$

Dies aber ist anders geschrieben:

$$\iint (\mu - \nu) E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'_{\bar{m},\bar{n}}(\mu) \cdot E''_{\bar{m},\bar{n}}(\nu) \cdot du \cdot dv = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Wie behauptet bleibt also in der Gleichung, welche wir durch Multiplication und Integration aus der Entwickelung von $f(\mu, \nu)$ gebildet haben, rechter Hand nur das eine Glied stehen, für welches $m = \overline{m}$ und $n = \overline{n}$. Wir bekommen von hier aus als Werth von $B_{m,n}$:

$$B_{m,n} = \frac{\iint(\mu - \nu) f(\mu, \nu) \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot du \cdot dv}{\iint(\mu - \nu)[E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu)]^2 du \cdot dv};$$

daraus dann für ψ die Reihe:

$$\psi = \sum_1^\infty {}_m \sum_1^\infty {}_n \frac{\iint(\mu-\nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) du\, dv}{E'''_{m,n}(r_2) \cdot \iint(\mu-\nu)[E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu)]^2 du\, dv} \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\varrho),$$

wo die Integrale über diejenigen Werthe von u und v zu erstrecken sind, welche auf der Seitenfläche $\varrho = r_2$ unseres Körpers liegen.

Dieses ψ mit dem Factor T multiplicirt ist das Potential, welches eines unserer sechs Einzelprobleme löst. Auf ganz entsprechende Weise werden die Lösungen der anderen fünf Einzelprobleme zu bilden sein, und die Summe der sechs so gefundenen Potentiale liefert die Lösung der allgemeinen Randwerthaufgabe.

§ 3. Kritik des soeben gefundenen Resultats.

Wir haben bis jetzt nur gezeigt, dass die hierdurch gefundene Lösung unseres Problems *formal* richtig ist. Es wäre noch nöthig, um ihre *reale* Richtigkeit nachzuweisen, den Convergenzbeweis der Reihenentwickelungen für f und ψ zu erbringen*), und ferner zu zeigen, dass die erste Reihe wirklich gegen den Grenzwerth f convergirt, und dass die zweite bei Annäherung an die Grenze des Körpers stetig in die erste übergeht. Schliesslich wäre noch zu beweisen, dass letztere Reihe auch zweimal gliedweise differentiirt werden darf oder doch jedenfalls der von ihren einzelnen Gliedern befriedigten partiellen Differentialgleichung genügt. Dass wir diese Beweise nicht bringen, ist eine erste grosse Lücke unserer Darstellung, welche hoffentlich durch spätere Untersuchungen noch ausgefüllt wird.

Es ist hier am Platze, einige allgemeine Bemerkungen über Convergenzbeweise einzuschalten (K). Es handelt sich um den Unterschied zwischen Convergenz im Sinne der reinen und im Sinne der angewandten Mathematik. Was man unter Convergenz im Sinne der

*) Die Convergenz der Reihe für f ist indessen nicht unbedingt nothwendig. Vergl. die Dissertation von Sommerfeld, Königsberg 1891: „Die willkürlichen Functionen in der mathematischen Physik“.



reinen Mathematik oder schlechtweg unter Convergenz zu verstehen hat, ist genügend bekannt und braucht hier nicht weiter erläutert zu werden*). Es wird aber meistens nicht betont, dass diese Convergenz weder nothwendig noch hinreichend ist, damit eine Reihe für die angewandte Mathematik brauchbar sei. Unter den brauchbarsten Reihen stehen beispielsweise viele der halbconvergenten Reihen, welche bekanntlich divergiren. Andererseits wird eine Reihe nicht für die Anwendungen brauchbar dadurch, dass ihre Convergenz nachgewiesen ist, denn man kann nur eine kleine Anzahl von Gliedern berechnen, und eine convergente Reihe, die erst mit einer grossen Zahl von Gliedern eine hinreichende Annäherung gibt, ist also praktisch werthlos. Um die Convergenz im Sinne der reinen Mathematik nachzuweisen, haben wir bekanntlich zu zeigen, dass der Fehler, der begangen wird, indem wir mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen, beliebig klein gemacht werden kann, indem wir diese Anzahl von Gliedern hinreichend gross nehmen. Um aber die Convergenz im Sinne der angewandten Mathematik nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dass, indem wir die Summe einer kleinen Zahl n von Gliedern der Reihe nehmen, der Fehler unter eine gewisse Beobachtungsschwelle gebracht werden kann; und diese Anzahl n muss auch angegeben werden.

Aber auch wenn es streng bewiesen wäre, dass die oben gefundene Reihenentwickelung die gewünschte Lösung unseres Problems liefert, würden wir noch keineswegs im Stande sein, unsere Lösung zur numerischen Berechnung zu benutzen, was doch der Zielpunkt aller Untersuchungen der mathematischen Physik sein sollte. Wir wollen hier noch einige Punkte zur Sprache bringen, bezüglich deren unsere Theorie eine weitere Entwickelung bedarf.

a) Wir kennen keine gute analytische Darstellung einer Lamé'schen Function. Allerdings können wir die Zweige einer solchen Function und insbesondere die Hauptzweige (wie wir alle Zweige nennen wollen, welche in dem einen oder dem anderen singulären Punkte zu einem der zwei dort vorhandenen Exponenten $0, \frac{1}{2}$ gehören) in Potenzreihen entwickeln; aber diese Darstellung ist für die Rechnung im Allgemeinen kaum zweckmässig, denn solche Reihen haben zunächst nur einen beschränkten Convergenzbereich, und auch innerhalb desselben ist es nicht gesagt, dass sie schnell genug convergiren, um überhaupt zur Berechnung benutzt werden zu können. Ausserdem haben sie den

*) Als classischer Beweis im Sinne der reinen Mathematik möge hier Dirichlet's Convergenzbeweis der Fourier'schen Reihe, Crelle Bd. 4, 1829, angeführt werden.

Nachtheil, dass ihre Coefficienten kein übersichtliches Gesetz verfolgen. Dies wäre denn ein erstes Desideratum: *übersichtliche und brauchbare Darstellungen gewisser Fundamentalzweige einer beliebigen Lamé'schen Function zu besitzen.*

b) Es sind aber nicht diese Fundamentalzweige selbst, welche wir für unser Problem gebrauchen, sondern andere Zweige, welche in gewissen, im Allgemeinen nicht singulären Punkten verschwinden, und welche wir natürlich auch als Potenzreihen darstellen können. Letztere Reihen werden aber in noch höherem Grade wie die Reihenentwickelungen der Hauptzweige die soeben erwähnten Nachtheile haben. Wir könnten aber diese Zweige mit Leichtigkeit aus zwei Fundamentalzweigen additiv zusammensetzen, wenn wir brauchbare analytische Darstellungen oder gar Tabellen dieser letzteren Zweige hätten. Hierzu brauchten wir nämlich nur einfach diejenigen Werthe der Fundamentalzweige zu berechnen, die für den Punkt gelten, in welchem der neue Zweig verschwinden soll.

c) Dann haben wir noch die Aufgabe, die accessorischen Parameter a und b der Lamé'schen Gleichung durch die gegebenen Oscillationseigenschaften wirklich numerisch zu bestimmen. Wir haben schon Seite 132 gesehen, dass dies darauf hinauskommt, die Wurzelpaare zweier simultaner transcendenter Gleichungen in zwei Unbekannten zu berechnen und eines der Wurzelpaare herauszusuchen; und es wäre natürlich sehr wünschenswerth Methoden zu besitzen, diese Wurzeln erst von einander zu separiren und dann bequem zu berechnen*).

d) Es wäre auch sehr wünschenswerth und vermuthlich zur Erbringung der oben genannten Convergenzbeweise erforderlich: *die m bezw. n Wurzeln der Gleichungen $E'_{m,n}(\mu) = 0$ bezw. $E''_{m,n}(\nu) = 0$, welche in den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ liegen, bequem berechnen oder doch separiren zu können.*

e) Schliesslich wären Untersuchungen über die Doppelintegrale anzustellen, welche in den Coefficienten der Reihenentwickelungen von f und ψ vorkommen, insbesondere Methoden zu suchen, wie man dieselben bequem numerisch auswerthen kann.

---

*) Diese Rechnung wäre aber vielleicht in gewissen Fällen, namentlich wenn die zwei Segmente, in denen die Oscillation vorgeschrieben ist, ihre bez. Intervalle genau einmal überdecken, dadurch zu vermeiden, dass wir analytische Darstellungen der Lamé'schen Functionen suchen, worin nicht die accessorischen Parameter a und b vorkommen, deren Werth nachträglich berechnet werden muss, sondern die Oscillationszahlen m und n selbst. Eine solche Darstellung wäre denjenigen Darstellungen elliptischer Functionen ähnlich, worin nicht der Modul k^2, sondern die Perioden vorkommen.

Hiermit brechen wir die Entwickelungen dieses Abschnittes ab. Wir fügen aber noch einen Paragraphen hinzu, auf dessen Resultate, obwohl dieselben zunächst nur negativ sind, wir uns im Folgenden beziehen werden.

§ 4. Ueber eine verallgemeinerte Randwerthaufgabe der Potentialtheorie.

Fassen wir zunächst folgendes Problem ins Auge, welches wir als verallgemeinerte Randwerthaufgabe bezeichnen wollen:

Es wird verlangt, eine Function V des Ortes zu finden, welche innerhalb eines gewissen Körpers der Potentialgleichung genügt, eindeutig ist und nebst ihrem ersten Differentialquotienten stetig verläuft; und auf der Begrenzung desselben der Bedingung genügt:

$$V + c\frac{\partial V}{\partial n} = F,$$

wo F und c vorgeschriebene Functionen des Ortes auf der Begrenzungsfläche und n die Richtung der nach aussen gerichteten Normalen bedeuten.

Man bemerke, dass wir es einfach mit der schon behandelten einfachen Randwerthaufgabe zu thun haben, wenn c überall den Werth Null hat. Dagegen wenn c überall unendlich ist, bekommen wir die ebenfalls sehr einfache Grenzbedingung, dass auf der Oberfläche des Körpers der Werth von $\frac{\partial V}{\partial n}$ beliebig vorgeschrieben wird. Ueberhaupt hat der Fall, dass c eine *Constante* bedeutet, das vorwiegende physikalische Interesse.

Für das allgemeine Cyclidensechsflach ist das so formulirte Problem, sogar im Falle $c = \infty$, durch unsere Methode nicht zu lösen. Trotzdem wird es aber von Interesse sein, die Sache näher zu betrachten.

Wir zerlegen unser Problem, gerade wie im Falle wo $c = 0$, in sechs Einzelprobleme, indem wir jedesmal die Grenzbedingung in ihrer ganzen Allgemeinheit auf nur einer der Seitenflächen, auf den anderen fünf aber die Grenzbedingung:

$$V + c\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

vorschreiben. Das gesuchte Potential ist natürlich die Summe der sechs so definirten Potentiale.

Nun müsste unser nächster Schritt sein diejenigen Lamé'schen Producte auszuwählen, welche Potentiale liefern, die auf fünf Seitenflächen der Bedingung genügen:

$$V + c\frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Hier tritt nun gleich die Hemmung ein. Da man nämlich, um ein Potential aus einem Lamé'schen Producte zu erhalten, letzteres mit einem Factor T multipliciren muss, welcher von allen drei krummlinigen Coordinaten abhängt, so wird auch dieser Factor beim Differentiiren in Bezug auf n in Betracht gezogen werden müssen. Wir sehen also, dass unser früherer Ansatz hier nicht mehr möglich ist.

Fassen wir dagegen das ganz ähnliche Problem ins Auge (welches freilich keine physikalische Bedeutung hat): *Eine ψ-Function zu bestimmen, welche auf der Seitenfläche r_2 der Grenzbedingung genügt:*

$$\psi + c\frac{\partial \psi}{\partial n} = f,$$

(wo f eine beliebig vorgeschriebene Function des Ortes auf dieser Seitenfläche bedeutet), auf den anderen fünf Seitenflächen aber der Grenzbedingung:

$$\psi + c\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Um dieses Problem zu lösen, nehmen wir zunächst ψ in der Form eines Lamé'schen Productes an: $E'(\mu) \cdot E''(\nu) \cdot E'''(\varrho)$. Nun sehen wir leicht, indem wir aus dem Ausdrucke für ds (Seite 89) den Ausdruck für dn zunächst auf den Seitenflächen m_1 und m_2 berechnen, dass der soeben geschriebenen Bedingung entsprechend die Gleichung:

$$E'(\mu) + \frac{c\,T^2}{\sqrt{-(\mu-\nu)(\mu-\varrho)}}\frac{dE'(\mu)}{du} = 0$$

befriedigt werden muss, wenn $\mu = m_1$ und wenn $\mu = m_2$ sind, und zwar unabhängig von den Werthen von ν und ϱ. Hierzu ist offenbar erforderlich, dass c eine solche Function des Ortes sein muss, dass der Ausdruck:

$$\frac{c\,T^2}{\sqrt{-(\mu-\nu)(\mu-\varrho)}}$$

auf der Fläche $\mu = m_1$, sowie auch auf der Fläche $\mu = m_2$ einen constanten Werth hat; diese zwei Constanten brauchen aber nicht dieselben zu sein, sondern mögen mit C_1 und C_2 bezeichnet werden.

Aus denselben Gründen muss, wenn $\nu = n_1$ und $\nu = n_2$, der Ausdruck:

$$\frac{c\,T^2}{\sqrt{-(\nu-\varrho)(\nu-\mu)}}$$

constante Werthe C_3 und C_4 haben. Und schliesslich, wenn $\varrho = r_1$, muss

$$\frac{c\,T^2}{\sqrt{-(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}}$$

einen constanten Werth C_5 haben.

Hiernach darf c nicht eine beliebige Function des Ortes sein, sondern muss auf diesen fünf Seitenflächen in ganz bestimmter Weise ausgewählt werden. Wenn aber c auf diese Weise bestimmt ist, so sehen wir sofort, dass wir an das verallgemeinerte Oscillationstheorem (Seite 132) Anschluss haben. In der That können wir, was auch die accessorischen Parameter der Lamé'schen Gleichung sein mögen, stets drei Particularlösungen E', E'', E''' finden, für welche in den Punkten m_1, n_1, r_1 der Quotient $\frac{E}{\frac{dE}{dt}}$ die Werthe $-C_1$, $-C_3$, $-C_5$ hat. Dann können wir ferner mittelst des verallgemeinerten Oscillationstheorems die accessorischen Parameter so bestimmen, dass für die Lösungen E' und E'', nachdem sie selber in den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ m- bezw. n-mal den Werth Null angenommen haben, der Quotient $\frac{E}{\frac{dE}{dt}}$ den Werth $-C_2$ bezw. $-C_4$ haben soll. Diese Lamé-schen Functionen wollen wir mit $E'_{m,n}(\mu)$, $E''_{m,n}(\nu)$, $E'''_{m,n}(\varrho)$ bezeichnen.

Schreiben wir jetzt für ψ folgende Doppelreihe:

$$\psi = \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n A_{m,n} E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\varrho),$$

so wird dieselbe die gesuchte ψ-Function sein, wenn wir die Coefficienten $A_{m,n}$ in der Weise bestimmen können, dass:

$$f = \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n A_{m,n} \left[E'''_{m,n}(\varrho) + \frac{dE'''_{m,n}(\varrho)}{dw} \right]_{\varrho = r_2} \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu).$$

Wir setzen jetzt:

$$B_{m,n} = A_{m,n} \left[E'''_{m,n}(\varrho) + \frac{dE'''_{m,n}(\varrho)}{dw} \right]_{\varrho = r_2},$$

und haben die Coefficienten folgender Reihenentwickelung zu bestimmen:

$$f(\mu, \nu) = \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n B_{m,n} \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu).$$

Diese Coefficienten bestimmen wir aber auf genau dieselbe Weise und mit demselben Resultate, wie wir es in dem einfachen Falle auf Seiten 155—157 gethan haben, obwohl jetzt die $E'_{m,n}$ und $E''_{m,n}$ eine andere Bedeutung haben wie dort.

Zusammenfassend haben wir hiermit in diesem Paragraphen Folgendes gefunden:

Die verallgemeinerte Randwerthaufgabe der Potentialtheorie, wo die Grenzbedingung lautet:

$$V + c\frac{\partial V}{dn} = F,$$

lässt sich für das allgemeine Cyclidensechsflach durch unsere Methoden nur in dem schon behandelten Falle, wo c überall Null ist, lösen. Dagegen lässt sich die entsprechende Randwerthaufgabe für die ψ-Function durch unsere Methoden lösen, sofern c auf ganz specielle Weise auf jeder der Seitenflächen des Körpers variirt. Specielle Fälle hiervon sind die folgenden: c ist überall Null oder überall unendlich (d. h. die Werthe von ψ oder von $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ sind auf der Begrenzung des Körpers beliebig vorgeschrieben); sonst aber darf c nicht constant sein.

Selbstverständlich kann man auch die Fälle behandeln, wo auf einigen der Seitenflächen die Werthe von ψ, auf anderen die Werthe von $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ vorgeschrieben werden, etc.

Dritter Abschnitt.

Ueber die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für ausgeartete Cyclidensechsflache.

Ehe wir unsere physikalischen Probleme in Angriff nehmen, wollen wir, gerade wie im vorigen Abschnitt, ein rein mathematisches Kapitel vorausschicken, worin wir solche Resultate ableiten, welche wir für später nöthig haben.

Kapitel 1.

Ueber die Specialfälle der Lamé'schen Gleichung und des zugehörigen Oscillationstheorems.

§ 1. Ueber die mehrfachen singulären Punkte Lamé'scher Gleichungen.

Wir haben die Lamé'sche Gleichung früher als eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten definirt, deren n singuläre Punkte jeder die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ hat. Nun fragen wir uns:

Was wird aus der Lamé'schen Gleichung, wenn zwei oder mehrere singuläre Punkte zusammenfallen?

Fassen wir zunächst die Gleichungsform (1) von Seite 117 ins Auge und lassen wir, um die Ideen zu fixiren, e_2 mit e_1 zusammenfallen, während die anderen e_i alle von einander getrennt bleiben. In diesem *doppelten* singulären Punkte, wie wir e_1 jetzt nennen wollen, verhält sich die Differentialgleichung, wie sofort zu sehen ist, regulär. Ferner berechnen wir leicht, dass die Exponenten des Punktes e_1 einander entgegengesetzt gleich sind und zwar die Werte haben:

$$\pm\sqrt{\frac{(n-4)^2 e_1^{n-2} + (n-2)(n-4)\left(\sum_3^n{}^i e_i\right) e_1^{n-3} + 4Ae_1^{n-4} + \cdots + 4M}{16(e_1-e_3)(e_1-e_4)\cdots(e_1-e_n)}},$$

ein Ausdruck, den wir auch für die homogene Gleichungsform (S. 120) bilden können, indem wir ihn zunächst für die Gleichung (2) S. 117 berechnen. Auf diese Weise finden wir für die zwei Exponenten:

$$\pm\sqrt{\frac{2\varphi(e_1)}{n(n-1)f''(e_1)} - \frac{n-4}{8(n-1)}}.$$

Wenn die Differenz dieser Exponenten ganzzahlig ist, werden in der Nähe unseres zweifachen singulären Punktes im Allgemeinen natürlich logarithmische Irrationalitäten auftreten; doch gehen wir hierauf der Kürze halber nicht näher ein.

Wir bemerken noch, dass diese Exponenten bei reeller Gleichung ebensowohl rein imaginär wie reell sein können.

Fallen nun mehr wie zwei Punkte e_i zusammen, so wird im Allgemeinen der Coefficient von y in der Lamé'schen Gleichung in diesem Punkte mehr wie zweifach unendlich und es tritt in Folge dessen Irregularität ein. Wir können also zusammenfassend sagen (K):

Bei einem zweifachen singulären Punkte verhält sich eine Lamé'sche Gleichung regulär; während aber die Summe ihrer Exponenten dort immer verschwindet, hat ihre Differenz einen von den accessorischen Parametern abhängigen Werth. Bei drei-, vier- u. s. w. -fachen Punkten tritt im Allgemeinen Irregularität ein.

Diese Betrachtungen gelten selbstverständlich für die homogene Form der Lamé'schen Gleichung auch dann noch, wenn der mehrfache singuläre Punkt im Unendlichen liegt. Dagegen bedürfen sie in diesem Falle für die nicht-homogenen Formen einer kleinen Modification, insofern die Summe der Exponenten eines zweifachen Punktes jetzt nicht mehr gleich Null, sondern gleich $\frac{n-4}{2}$ sein wird. Andererseits bemerken wir, dass die nicht-homogenen Formen der Lamé'schen Gleichung in dem hiermit bezeichneten Falle etwas einfacher werden. Dies erläutern wir an der Gleichungsform (3), denn gerade die so gewonnene Lamé'sche Gleichung findet man fast ausschliesslich in der Literatur.

Sei denn e_k ein ν-facher Punkt und setzen wir:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-e_k)^\nu}\cdot f(x), \quad t_1 = \int\frac{dx}{2\sqrt{f_1(x)}},$$

so können wir die Lamé'sche Gleichung schreiben:

$$(x-e_k)^\nu \frac{d^2y}{dt_1^2} + \nu(x-e_k)^{\nu-1}\cdot\sqrt{f_1}(x)\cdot\frac{dy}{dt_1}$$

$$= \left[\frac{-n(n-4)}{4}x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4}\left(\sum_1^n{}_i\, e_i\right)x^{n-3} + Ax^{n-4} + \cdots\right]y.$$

Setzen wir hier $e_k = \infty$, so bekommen wir:

$$\frac{d^2y}{dt_1^2} = [Ax^{n-4} + Bx^{n-5} + \cdots + M]y\ ^*),$$

wo aber die accessorischen Parametr $A, B, \ldots M$ nicht die früheren $A, B, \ldots M$ sind, welche wir der Allgemeinheit halber unendlich werden lassen müssen, sondern vielmehr die Grenzen von letzteren durch $(-e_k)^\nu$ dividirt.

Wenn insbesondere $\nu = 2$ ist, so ist die soeben gefundene Gleichung gerade diejenige, welche von Heine als allgemeine Lamé'sche Gleichung $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet wird**). Wir können also durch folgenden Satz die Heine'sche Bezeichnungsweise mit der unserigen vergleichen:

*Diejenige Gleichung, welche Heine als allgemeine Lamé'sche Gleichung von der Ordnung $n-3$ bezeichnet, tritt bei uns auf als derjenige Specialfall der Lamé'schen Gleichung, in welchem zwei der n einfachen singulären Punkte im Unendlichen zusammenfallen****).

§ 2. Ueber die Ausartung Lamé'scher Gleichungen auf andere von niederem n.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass bei einem ν-fachen singulären Punkte e_k einer Lamé'schen Gleichung für $\nu \geqq 3$ im Allgemeinen irreguläres Verhalten eintritt. Wenn wir aber auf die Gleichungsform (2) Bezug nehmen, erkennen wir, dass dies nicht mehr der Fall ist, wenn die Function $ax^{n-4} + bx^{n-5} + \cdots + m$ im Punkte e_k mindestens $(\nu-2)$-fach verschwindet. In diesem Falle artet die Lamé'sche Function in das Product einer Potenz von $x - e_k$ und einer

*) Wir setzen hier voraus, dass e_k ein mehrfacher Punkt ist. Ist es aber ein einfacher Punkt, so haben wir $\nu = 1$ in unserer Rechnung zu machen und bekommen die Lamé'sche Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{d^2y}{dt_1^2} = \left[\frac{-(n-2)(n-4)}{4}x^{n-3} + Ax^{n-4} + \cdots + M\right]y.$$

**) Des Weiteren specialisirt Heine, nach dem Vorgange von Lamé, die accessorischen Parameter $A, B, \ldots M$ gleich in der Weise, dass die Gleichung eine algebraische Lösung erhält.

***) Wir fügen noch ohne Beweis folgenden interessanten Satz hinzu (K): Abgesehen von einem Factor der Form:

$$(x-e_1)^{\alpha_1}(x-e_2)^{\alpha_2}\cdots(x-e_p)^{\alpha_p}\cdot e^{\varphi(x)}$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function bedeutet, ist die Lösung jeder homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten eine specielle Lamé'sche Function.

Lamé'schen Function von niederem n aus. Indem wir diesen Umstand weiter überlegen, kommen wir auf den folgenden Satz, in dem wir der Kürze halber die Functionen $(x - e_1)(x - e_2)\cdots(x - e_n)$ und $ax^{n-4} + bx^{n-5} + \cdots + m$ durch $f(x)$ und $\varphi(x)$ bezeichnen:

Ist e_k eine ν-fache Wurzel ($\nu \geq 3$) von $f(x)$ und zugleich eine μ-fache Wurzel ($\mu \leq \nu - 2$)) von $\varphi(x)$, so arten die Lamé'schen Functionen $E(x)$ in folgendes Product aus:*

$$(x - e_k)^{-\frac{\mu}{4}} \cdot \overline{E}(x),$$

*unter $\overline{E}(x)$ eine Lamé'sche Function verstanden, welche im Punkte e_k einen $(\nu - \mu)$-fachen singulären Punkt besitzt, sonst aber dieselben Singularitäten wie $E(x)$**).*

Die Richtigkeit dieses Satzes beweist man durch directes Nachrechnen, indem man etwa an die Gleichungsform (2) anknüpft.

Der hierdurch gewonnene Satz lässt sich sofort auf Lamé'sche *Formen* übertragen, wo wir natürlich die Gleichung haben würden:

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - e_k x_2)^{-\frac{\mu}{4}} \cdot \overline{F}(x_1, x_2).$$

Wegen späterer Anwendungen mag noch insbesondere der Fall $e_k = \infty$ erwähnt werden. Während hier für die Lamé'schen Formen der mit $\overline{F}$ multiplicirte Factor sich auf $x_2^{-\frac{\mu}{4}}$ reducirt, fällt derselbe für die Lamé'schen Functionen überhaupt weg.

Selbstverständlich kann die in diesem Paragraphen besprochene Ausartung gleichzeitig in Bezug auf verschiedene mehrfache singuläre Punkte $e_k, e_l, e_m, \ldots$ eintreten***).

---

*) Wenn wir $\mu < \nu - 2$ voraussetzen, so soll nicht damit gesagt werden, dass die ganze Multiplicität von e_k als Wurzel von $\varphi(x)$ die Zahl $\nu - 2$ nicht überschreiten darf, sondern nur, dass wir denjenigen Theil dieser Multiplicität als μ bezeichnen, welcher höchstens gleich ist $\nu - 2$.

**) Wenn wir durch $\overline{\varphi}(x)$ diejenige Function bezeichnen, deren Coefficienten die accessorischen Parameter der Differentialgleichung für $\overline{E}(x)$ sind, so werden wir *nicht* haben $\varphi(x) = (x - e_i)^{\mu}\,\overline{\varphi}(x)$, wie man vielleicht erwarten möchte.

***) Bei der im Texte besprochenen Ausartung hat die ausgeartete Function $\overline{E}(x)$ in den betreffenden Punkten noch immer singuläre Punkte, welche mindestens zweifach sind. Man kann aber natürlich durch weitere, freilich viel complicirtere, Specialisirung von $\varphi(x)$ erreichen, dass diese Punkte sich auf einfache singuläre Punkte oder auf nicht-singuläre Punkte reduciren. Diese weitere Ausartung hat aber für die physikalischen Probleme, die wir im Folgenden behandeln werden, keine besondere Bedeutung.

§ 3. Das Oscillationstheorem bei specieller Gleichung aber allgemeinen Segmenten*).

Bevor wir zum Oscillationstheorem selber kommen, haben wir vor allen Dingen zwischen allgemeinen und specialisirten Segmenten der x-Axe zu unterscheiden. Unter einem specialisirten Segment verstehen wir ein Segment, welches als Endpunkt einen singulären Punkt der Lamé'schen Gleichung hat. Solche Segmente werden wir im nächsten Paragraphen in Betracht ziehen, während wir uns in diesem Paragraphen auf allgemeine Segmente beschränken.

Wir beschränken uns wieder auf den Fall $n = 5$ und betrachten solche Gleichungen, welche mehrfache singuläre Punkte besitzen. Indem wir diese Gleichungen als Grenzfälle der allgemeinen Lamé'schen Gleichung $n = 5$ ansehen, haben wir zweierlei Segmente in Betracht zu ziehen, auf welche wir das Oscillationstheorem anwenden möchten:

a) Segmente, welche zwischen singulären Punkten liegen, die nicht zusammenfallen.

b) Segmente, welche zwischen zusammenfallenden singulären Punkten liegen.

Im Falle a) sehen wir sofort, dass Alles beim Alten bleibt, so lange das Segment in einem Intervalle liegt, welches noch von einfachen singulären Punkten begrenzt ist. Dies ist ferner auch der Fall, wenn eine oder beide Enden des betreffenden Intervalles mehrfache Punkte sind. Denn es wird hier offenbar nichts Wesentliches geändert werden, so lange sich unser Segment nicht bis an einen mehrfachen singulären Punkt erstreckt. Nun betrachten wir aber in diesem Paragraphen nur allgemeine Segmente, so dass wir hier den Fall nicht in Betracht zu ziehen haben, in welchem das Segment *genau* bis an einen mehrfachen Punkt heranreicht. Andererseits kann das Segment sich im Allgemeinen überhaupt nicht in einem mehrfachen singulären Punkte umbiegen, sofern wir im reellen Gebiete bleiben wollen. Wir wollen also hier ein für alle Mal folgendermassen verabreden:

Wir beschränken uns auf Segmente, welche, sofern sie sich nicht bei einfachen singulären Punkten umbiegen, die x-Axe nur einfach überdecken.

Hiernach sehen wir, dass für allgemeine Segmente des Falles a) der ganze Ansatz zum Beweise des Oscillationstheorems in keiner Weise zu ändern ist.

---

*) Für die übrigen Entwickelungen dieses Kapitels bin ich allein verantwortlich, da sie in der Vorlesung von Herrn Klein nicht zur Sprache gebracht wurden.

Wir haben also in diesem Paragraphen nur noch Segmente des Falles b) näher zu betrachten, bei welchen in der That eine wesentliche Vereinfachung unseres Ansatzes eintritt.

Betrachten wir zunächst den Fall eines Segmentes, welches in einem Intervalle zwischen zwei einfachen singulären Punkten liegt, die zu einem zweifachen Punkte zusammenfallen. Bezeichnen wir durch ε die Länge dieses verschwindenden Intervalles, so können wir die Länge des in ihm liegenden Segmentes durch $c\varepsilon$ bezeichnen, wo c eine endliche positive Grösse ist, welche grösser oder kleiner wie Eins sein wird, je nachdem das Segment länger wie das Intervall ist oder kürzer. Da nun das Intervall ε und folglich auch das Segment, in welchem Oscillation stattfinden soll, unendlich kurz ist, möchte man zuerst denken, dass die anziehende Kraft in unserem mechanischen Hülfsproblem unendlich stark gemacht werden müsste, um in diesem Segmente noch eine endliche Anzahl von Oscillationen hervorzurufen. Bei näherer Betrachtung sehen wir aber, dass dies nicht der Fall ist. Seien nämlich e_1 und e_2 die zwei zusammenfallenden einfachen Punkte, so ist $e_2 = e_1 + \varepsilon$. Seien ferner m_1 und m_2 die Endpunkte des Segmentes der x-Axe und folglich:

$$T = \int_{m_1}^{m_2} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)(x-e_5)}}$$

die Länge des entsprechenden Zeitintervalls, wo natürlich das Integral über das ganze Segment zu erstrecken ist, nicht nothwendig direct von m_1 bis m_2. Setzen wir nun: $x = e_1 + \varepsilon x'$ und dementsprechend $m_1 = e_1 + \varepsilon m_1'$ und $m_2 = e_1 + \varepsilon m_2'$, so können wir schreiben:

$$T = \int_{m_1'}^{m_2'} \frac{dx'}{2\sqrt{x'(x'-1)(\varepsilon x' + e_1 - e_3)(\varepsilon x' + e_1 - e_4)(\varepsilon x' + e_1 - e_5)}}.$$

In der Grenze also, wo die zwei Punkte e_1 und e_2 zusammenfallen, bekommen wir:

$$T = \frac{1}{\sqrt{(e_1-e_3)(e_1-e_4)(e_1-e_5)}} \int_{m_1'}^{m_2'} \frac{dx'}{2\sqrt{x'(x'-1)}}$$

$$= \frac{\arcsin\sqrt{m_2'} - \arcsin\sqrt{m_1'}}{\sqrt{(e_3-e_1)(e_4-e_1)(e_5-e_1)}} \,^{*)}.$$

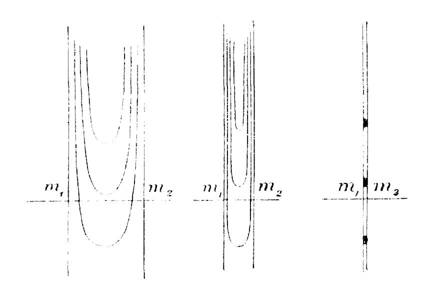
*) Natürlich sind die zwei im Zähler stehenden arcus sinus nur dann in demselben Quadranten zu nehmen, wenn das Segment der x-Axe direct von x_1 bis x_2 läuft, ohne sich an den Endpunkten des Intervalles $e_1 e_2$ umzubiegen.

Wir sehen also, dass *trotzdem das Segment* m_1, m_2 *unendlich kurz wird, das entsprechende Zeitintervall* T *endlich bleibt*, und dass folglich die anziehende Kraft auch eine endliche sein muss, um in diesem Zeitintervall eine endliche Anzahl von Oscillationen hervorzurufen. Nun ist aber die Kraft in diesem Zeitintervall bezw. im Segmente m_1, m_2 durch die Ordinate der Hülfsgeraden im Doppelpunkte e_1 vollständig bestimmt, während die Richtung dieser Geraden auf dieselbe keinen Einfluss hat. Wir gewinnen also folgenden Satz:

Sämmtliche Hülfsgeraden, welche durch einen und denselben Punkt auf einer in einem doppelten singulären Punkte errichteten Ordinate hindurchgehen, liefern für die Segmente, welche in dem unendlich kleinen Intervalle liegen, dieselbe Kraft.

Nun müssen aber diejenigen Hülfsgeraden, welche in einem Segmente $x_1 x_2$ dieselbe Anzahl von Halboscillationen verursachen, offenbar auch dieselbe Kraft geben, und folglich nach dem obigen Satze einen Punkt umhüllen.

Die Hüllcurven, welche einem endlichen Segmente entsprechen, arten, wenn dieses Segment in einem verschwindenden Intervalle liegt, welches in der Grenze zu einem zweifachen Punkte wird, in Hüllpunkte aus.



Wie diese Ausartung continuirlich vor sich geht, mag schematisch durch die nebenstehende Figur angedeutet werden. Indem nämlich die einfachen singulären Punkte zu einem zweifachen zusammenrücken, werden die Hüllcurven immer schmaler und spitzer, so dass in der Grenze ihre Scheitel allein noch vorhanden sind und gerade diese sind die Hüllpunkte.

Es mag noch bemerkt werden, dass alle diese Hüllpunkte oberhalb (bezw. alle unterhalb) desjenigen Punktes A liegen werden, wo die Curve dritter Ordnung $y = \frac{f''(x)}{16}$ die im doppelten singulären Punkte errichtete Ordinate schneidet.

Bis jetzt haben wir in diesem Paragraphen nichts von den Exponenten der zweifachen singulären Punkte gesagt. Wir fügen also noch folgenden Satz hinzu, dessen Beweis sich vermöge der Formel von Seite 165 sofort führen lässt:

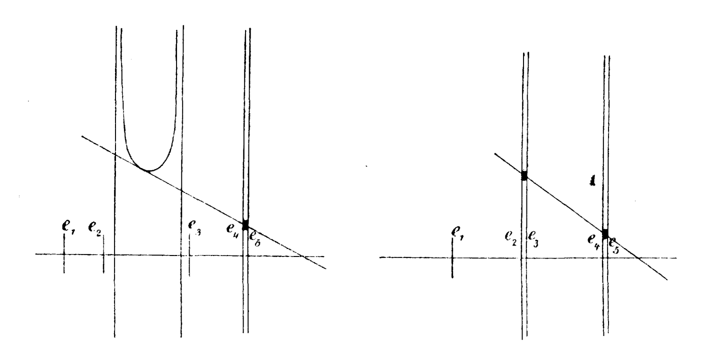
Indem man verlangt, dass die Hülfsgerade durch einen Hüllpunkt eines in einem zweifachen singulären Punkte liegenden Segmentes hindurchgehen soll, hat man, ohne die weitere Lage der Hülfsgeraden zu

bestimmen, geradezu die Exponenten des singulären Punktes festgelegt; und zwar werden dieselben dann stets reell sein.

Diese Exponenten können an sich, wie wir früher gesehen haben, auch rein imaginär sein; dann wird man aber in dem verschwindenden Intervalle eine abstossende Kraft haben. Schliesslich notiren wir:

Sind die Exponenten eines zweifachen singulären Punktes Null, so hat man im verschwindenden Intervalle überhaupt keine Kraft.

Gehen wir jetzt zum Oscillationstheorem selber über, indem wir noch ein zweites Segment ins Auge fassen. Dieses zweite Segment kann entweder ein gewöhnliches (endliches) Segment sein, oder aber ein anderes Segment von derselben Art wie das soeben betrachtete, welches aber in einem anderen zweifachen singulären Punkte liegen muss. *In beiden Fällen bleibt das Oscillationstheorem bestehen.* Denn im ersten Falle können wir von dem Hüllpunkte des einen Segmentes eine Tangente an die Hüllcurve des anderen ziehen, im zweiten aber die zwei Hüllpunkte durch eine Gerade verbinden; vergl. die nebenstehenden Figuren.



Aber nicht nur im geometrischen Beweise unseres Oscillationstheorems, sondern auch bei dem analytischen Probleme der Bestimmung der accessorischen Parameter vermöge derselben, tritt in den soeben besprochenen Fällen eine wesentliche Vereinfachung ein. In der That sehen wir aus unseren Figuren sofort, dass, wenn $m_1 m_2$ das unendlich kurze Segment bedeutet, die transcendente Gleichung $E(m_2;\, a,\, b) = 0$ (vergl. S. 131) in den zwei Unbekannten a, b sich jetzt in unendlich viele Linearfactoren spaltet, deren jeder gleich Null gesetzt die Gleichung eines Hüllpunktes in Liniencoordinaten liefert. Nun können aber diese Linearfactoren mit Leichtigkeit wirklich ausgewerthet werden. In der That ist bei unserem mechanischen Hülfsproblem in diesem Falle die anziehende Kraft während des ganzen Zeitintervalles, welches

dem Segmente $m_1 m_2$ entspricht, offenbar gleich einem *constanten* Multiplum der Entfernung y, so dass wir es mit einfachen Sinusschwingungen unseres Massenpunktes zu thun haben. Indem wir also die Länge dieses Zeitintervalles berechnen, können wir sofort die Stärke der Kraft angeben, welche nöthig ist, um eine beliebige Anzahl von Halboscillationen in demselben hervorzurufen, und diese Kraft giebt unmittelbar die Lage des Hüllpunktes und folglich den entsprechenden Linearfactor an.

Ist also das zweite Segment, in welchem wir Oscillation verlangen, von endlicher Länge, so haben wir zur Bestimmung der accessorischen Parameter nur scheinbar wieder zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten. Während nämlich die zweite dieser Gleichungen transcendent ist, ist die erste linear. Vermöge der ersten dieser Gleichungen können wir also eine der zwei Unbekannten a und b aus der zweiten Gleichung eliminiren, und haben dann nicht mehr die Wurzeln zweier simultaner transcendenter Gleichungen zwischen zwei Unbekannten zu ermitteln, sondern nur noch die Wurzeln einer einzigen transcendenten Gleichung mit einer Unbekannten, was natürlich eine viel einfachere Aufgabe ist.

Wenn andererseits zwei zweifache singuläre Punkte vorhanden sind, und in jedem derselben unendlich kurze Segmente liegen, in welchen wir Oscillation verlangen wollen, so spalten sich alle beide transcendente Gleichungen in unendlich viele Linearfactoren, welche wirklich berechnet werden können. Die accessorischen Parameter bestimmt man dann, indem man den richtigen Linearfactor in beiden Fällen herausgreift, und dann die zwei Gleichungen ersten Grades löst, welche durch Nullsetzen dieser Factoren entstehen.

Hiermit haben wir, was allgemeine Segmente angeht, alle Fälle behandelt, welche vorkommen, so lange nur ein- oder zweifache singuläre Punkte auftreten. Gehen wir jetzt zum Falle eines dreifachen Punktes über, so sehen wir sofort durch einen ähnlichen Grenzübergang wie soeben, dass die zwei in diesem Punkte verschwundenen Intervalle jetzt unendlich langen Zeitintervallen entsprechen. Dasselbe gilt natürlich auch von jedem in einem der verschwindenden Intervalle liegenden Segmente, welches von derselben Ordnung unendlich klein wird wie das Intervall selbst. Hiernach muss die Kraft in einem jeden solchen Segmente unendlich schwach gemacht werden, damit nur eine endliche Anzahl von Oscillationen zu Stande kommen soll. Nun verschwindet aber offenbar in einem dreifachen singulären Punkte die Ordinate der Curve $y = \frac{f''(x)}{16}$,

und folglich *häufen sich die Hüllpunkte eines beliebigen Segmentes des einen verschwindenden Intervalles unendlich nahe an die eine Seite, diejenigen eines Segmentes des anderen Intervalles unendlich nahe an die andere Seite der x-Axe.*

Wenn wir uns nun an den auf Seite 167 angeführten Satz erinnern, können wir sofort folgenden interessanten Vergleich anstellen:

Im Allgemeinen ist eine Lamé'sche Gleichung $n = 5$ in einem dreifachen singulären Punkte irregulär, was dem Umstande entspricht, dass ihre Lösungen in jedem Segmente des einen dort verschwindenden Intervalles unendlich oft oscilliren. Wenn dagegen die Hülfsgerade der Lamé-schen Gleichung durch den dreifachen singulären Punkt der x-Axe selbst hindurchgeht, ist letzteres nicht mehr der Fall, und dementsprechend arten die Lamé'schen Functionen in der Weise aus, dass sie, abgesehen von einem sich abtrennenden Factor $(x - e_i)^{-\frac{1}{4}}$, dem Falle $n = 4$ angehören.

Fassen wir jetzt den Fall ins Auge, in welchem wir ausser in dem Segmente, welches in einem der im dreifachen singulären Punkte liegenden Intervalle liegt, noch in einem endlichen Segmente eine gewisse Anzahl von Oscillationen verlangen wollen. Hier hat das endliche Segment natürlich eine gewöhnliche Hüllcurve, während der Hüllpunkt des anderen Segmentes, ganz abgesehen von der dort stattzufindenden Oscillationszahl, in dem dreifachen singulären Punkte der x-Axe selber liegt. Das Oscillationstheorem bleibt also noch immer bestehen, nur werden wir für alle endlichen Oscillationszahlen in dem unendlich kurzen Segmente die nämliche Hülfsgerade bekommen. Hier reicht also die Angabe einer einzigen Oscillationszahl (nebst der Forderung der Endlichkeit für die andere Oscillationszahl) zur Festlegung der accessorischen Parameter aus.

Was nun die wirkliche Berechnung der accessorischen Parameter durch das Oscillationstheorem in diesem Falle angeht, so sieht man leicht, dass dieselbe elementar auszuführen ist, trotzdem wir wieder die Aufgabe haben, von einem Punkte aus an eine transcendente Curve Tangenten zu ziehen. In der That haben wir, da der Factor $(x - e_i)^{-\frac{1}{4}}$ im endlichen Segmente nicht oscillirt, nur noch die Aufgabe, die Lamé'sche Function $n = 4$ so zu bestimmen, dass sie in dem betreffenden endlichen Segmente die gewünschte Anzahl von Oscillationen ausführt.

Liegen andererseits unsere beiden Segmente in dem dreifachen singulären Punkte selber, — das eine in dem einen dort verschwindenden Intervalle, das andere in dem anderen, — so ist es klar, dass die Hülfsgerade, welche zwei einander unendlich nahe liegende Hüll-

punkte verbindet, durch den dreifachen singulären Punkt der x-Axe hindurchgehen muss, während sie eine bestimmte Richtung besitzt, welche von den Oscillationszahlen in den zwei verschwindenden Segmenten abhängt. Die wirkliche Festlegung dieser Hülfsgeraden hängt dann von transcendenten Bestimmungsstücken ab, auf welche wir an dieser Stelle nicht näher eingehen wollen.

§ 4. Das Oscillationstheorem bei specieller Gleichung und specialisirten Segmenten.

Die Specialisirung eines Segmentes, welche wir in diesem Paragraphen betrachten wollen, besteht, wie wir schon sagten, darin, dass das Segment genau bis an den Endpunkt eines Intervalles heranreicht. Wenn dieser Endpunkt ein einfacher singulärer Punkt ist, tritt, wie wir schon im vorigen Abschnitt bemerkten, keine Modification des Oscillationstheorems ein.

Fassen wir denn zunächst den Fall ins Auge der eintritt, wenn ein Endpunkt m_2 eines Segmentes in einem zweifachen singulären Punkte e_i liegt. Ehe wir dazu übergehen die Gestalt der Hüllcurve eines solchen Segmentes zu discutiren, wollen wir vorab die Oscillationseigenschaften der Lamé'schen Curven für einige specielle Lagen der Hülfsgeraden besprechen.

Das Zeitintervall welches unserem Segmente entspricht wird offenbar unendlich lang sein. Wenn also in diesem ganzen Zeitintervalle, oder in einem unendlichen Theile desselben, die Kraft eine anziehende ist, werden wir nothwendig unendlich viele Oscillationen im Segmente haben, und zwar in der Nähe des zweifachen Punktes e_i, — es sei denn, dass die anziehende Kraft bei wachsender Zeit ins Unendliche abnimmt, wobei es einer genaueren Ueberlegung bedürfen würde, um irgend etwas über die Anzahl der Oscillationen zu entscheiden.

Zu demselben Resultate führt uns auf analytischem Wege die Betrachtung der *Exponenten* des zweifachen singulären Punktes. Hat man nämlich Anziehung während des ganzen Segmentes $m_1 m_2$, welche auch im zweifachen Punkte e_i nicht unendlich schwach wird, so wird man im benachbarten unendlich kurzen Intervalle, welches *im* zweifachen Punkte liegt, offenbar Abstossung haben. Hiernach müssen die Exponenten dieses Punktes (vergl. Seite 171) rein imaginär sein. Jede reelle Lösung ist also in der Nähe des betreffenden Punktes in erster Annäherung in der Form: $A \sin \log (x - e_i)^\nu + B \cos \log (x - e_i)^\nu$ darstellbar und wird also in der Nähe des zweifachen Punktes unendlich viele Oscillationen ausführen.

Aber auch über den noch nicht erledigten Fall, in welchem die Kraft bis an den zweifachen Punkt eine anziehende ist, dort aber verschwindet, giebt uns die Betrachtung der Exponenten Aufschluss. Die Exponenten sind nämlich in diesem Falle Null, und folglich verläuft die eine Lösung in der Nähe des zweifachen Punktes ohne Singularität, während die anderen Lösungen einfach logarithmisch unendlich werden. Folglich wird man jetzt nur eine endliche Anzahl von Oscillationen im Segmente haben.

Nach dem schon Gesagten sehen wir, dass die Hüllcurven des Segmentes $m_1 m_2$ nicht mehr die frühere Gestalt haben können, denn sonst würde ein Theil ihrer Tangenten Anziehung bis an den Punkt e_i inclusive geben. Wir haben also als nächste Aufgabe die Untersuchung der wirklichen Gestalt der Hüllcurven.

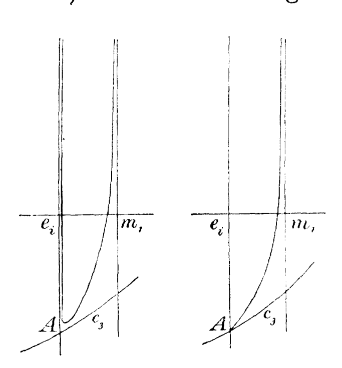
Es sei P ein auf der Ordinate im zweifachen singulären Punkte so gelegener Punkt, dass der singuläre Punkt reelle von Null verschiedene Exponenten bekommt, wenn die Hülfsgerade durch P hindurchgeht. Nehmen wir an, um die Ideen zu fixiren, dass P unterhalb des Punktes A liegt, wo die Curve dritter Ordnung $y = \frac{1}{16} f''(x)$ die zum zweifachen singulären Punkte gehörige Ordinate schneidet (läge P oberhalb von A, so hätte man im Folgenden nur die Wörter oben und unten mit einander zu vertauschen). Wenn man nun die Hülfsgerade um P herumdreht, so wird sich offenbar diejenige Lamé'sche Curve, welche im Punkte e_i dem positiven Exponenten entspricht und also in diesem Punkte eine verschwindende Ordinate hat, continuirlich ändern, so lange die Hülfsgerade nicht gerade verticale Richtung annimmt, und dabei wird die Lamé'sche Curve natürlich im ganzen Segmente $e_i m_1$ endliche Ordinaten besitzen.

Wenn wir nun die Hülfsgerade um den Punkt P weit genug nach oben drehen, können wir es erreichen, dass während eines beliebig langen Zeitintervalles die auf unseren Massenpunkt wirkende Kraft eine anziehende ist, und zwar mindestens von einer beliebig vorgegebenen Stärke. Die Anzahl von Oscillationen im Segmente $e_i m_1$ können wir also sicher grösser als eine beliebig gegebene Zahl m werden lassen. Indem wir andererseits die Hülfsgerade um P nach unten drehen, können wir während des ganzen Segmentes $e_i m_1$ Abstossung bekommen, und folglich *keine* Oscillationen. Indem wir nun die Hülfsgerade von der ersten Lage, in der sie mehr wie m Halboscillationen hervorrief, nach unten drehen, bis sie in die zweite Lage kommt, in der sie keine Oscillationen hervorruft, wird die Anzahl von Oscillationen allmählich kleiner, so dass wir den Satz gewinnen:

Durch P geht eine und nur eine Hülfsgerade, welche im Segmente $e_i m_1$ genau m Halboscillationen hervorruft.

Es bleibt also nur noch zu untersuchen, wie die Lage dieser Hülfsgeraden sich ändert, wenn P auf der Ordinate im Punkte e_i sich bewegt. Zunächst bemerken wir, dass je zwei von diesen Hülfsgeraden sich innerhalb des auf dem Segment $e_i m_1$ errichteten Streifens schneiden müssen, damit nicht die eine durchaus stärkere Anziehung geben soll wie die andere, und dass folglich die von ihnen umhüllte Curve ganz in diesem Streifen liegen muss, — dann aber auch, dass die letztgenannte Hüllcurve keinen Wendepunkt besitzen kann, denn nach dem soeben Gesagten können parallele Hülfsgeraden nicht vorkommen. Wenn also P sich nach oben bewegt, muss die durch ihn hindurchgehende Hülfsgerade immer weniger steil werden, bis P den Punkt A erreicht, welchen er nicht überschreiten darf.

Bewegt sich andererseits der Punkt P nach unten, so wird die Hülfsgerade immer steiler, und zwar nähert sie sich der verticalen Lage. Dass ferner diese verticale Grenzlage mit der Ordinate im Endpunkte m_1 des Segmentes zusammenfallen muss, und auch dass sie nicht eine Tangente, sondern eine Asymptote der Hüllcurve sein muss, sehen wir auf genau dieselbe Weise ein, wie früher (S. 128) im Falle der allgemeinen Hüllcurve. Hiernach erkennen wir, dass die Hüllcurve eine Gestalt haben wird, wie sie in der zweiten der nebenstehenden Figuren gezeichnet ist, wobei wir aber noch ausdrücklich erwähnen müssen, dass die Tangente durch A selber nur in uneigentlichem Sinne zur Curve gehört, indem sie nicht *genau m* Halboscillationen hervorruft, weil die ihr entsprechende Lamé'sche Curve, welche zum Exponenten Null gehört, keine verschwindende Ordinate im Punkte e_i besitzt. Die erste dieser Figuren soll die continuirliche Entstehung der zweiten aus der gewöhnlichen Gestalt der Hüllcurven verständlich machen.



Wegen dieser neuen Form der Hüllcurven wird nun *das Oscillationstheorem, wo auch das andere Segment liegen mag, nicht mehr allgemein aufrecht zu erhalten sein*, indem es jedenfalls für hinreichend grosse Oscillationszahlen m unrichtig ist. Indem wir nämlich die verschiedenen Hüllcurven des Segmentes $e_i m_1$ in Betracht ziehen, welche zu verschiedenen Oscillationszahlen m gehören, so sehen wir, dass je grösser m wird, desto steiler die Tangente durch A wird, und dass

sich diese Tangente bei wachsendem m der verticalen Lage als Grenze nähert. Nun sind aber alle anderen Tangenten der Hüllcurve steiler wie diese Tangente durch A. Folglich können wir, wie auch die Hüllcurve des anderen Segmentes liegen mag, die Zahl m so gross wählen, dass sämmtliche Tangenten der Hüllcurve des Segmentes $e_i m_1$ beliebig steil sind und also entweder die andere Hüllcurve schneiden oder aber gar nicht treffen, so dass in jedem Falle keine gemeinsame Tangente existiren kann. In solchen Fällen aber, wo eine gemeinsame Tangente existirt, wird es gerade wie früher nur eine solche geben können.

Es giebt eine einzige aber sehr wichtige Ausnahme zum soeben Gesagten. Liegt nämlich das andere Segment im verschwindenden Intervalle des zweifachen singulären Punktes e_i selber, so werden wir *immer* von dem zu diesem Segmente gehörenden Hüllpunkte eine und nur eine Tangente an die soeben besprochene Hüllcurve des Segmentes $e_i m_1$ legen können*). Wir fassen in folgendem Satze zusammen:

Ist eins der zwei Segmente, auf welche wir das Oscillationstheorem anwenden wollen, dadurch specialisirt, dass es bis an einen zweifachen singulären Punkt heranreicht, so wird das Oscillationstheorem nur in dem Falle für alle Oscillationszahlen des so specialisirten Segmentes bestehen bleiben, dass das andere Segment im verschwindenden Intervalle des zweifachen Punktes e_i liegt.

Gehen wir jetzt zum Falle über, in welchem das Segment anstatt durch einen zweifachen Punkt, durch einen drei- oder, um gleich allgemein zu reden, durch einen vielfachen Punkt e_i begrenzt ist. Hier entspricht dem Segmente wieder ein unendlich langes Zeitintervall, und es ist in dieser Hinsicht zunächst kein wesentlicher Unterschied mit dem soeben besprochenen Falle vorhanden. Doch können wir unsere Resultate nicht ohne Weiteres auf diesen Fall übertragen, *weil uns nicht mehr die Exponenten von e_i zur Verfügung stehen.* Wir schicken also zunächst folgendes Lemma voraus:

Auf jeder Seite eines reellen irregulären Punktes einer nicht auf $n = 4$ ausgearteten Lamé'schen Gleichung $n = 5$ giebt es für jedes Paar accessorischer Parameter e i n e *Lösung, welche in der Nähe des singulären Punktes endlich bleibt.*

Um diesen Satz, dessen Richtigkeit wir bei einem zweifachen Punkte sofort aus der Theorie der Exponenten schliessen konnten, zu beweisen, ziehen wir wieder unser mechanisches Hülfsproblem heran.

Fassen wir nämlich das unendlich lange Zeitintervall ins Auge, das

*) Dies folgt nicht nur aus der Gestalt der Hüllcurven, sondern vielmehr aus den Ueberlegungen selber, welche wir auf voriger Seite zur Discussion dieser Gestalt gebraucht haben.

dem Segmente entspricht, welches von der einen Seite herkommend an den singulären Punkt heranzieht. Dabei schliessen wir ohne Weiteres den Fall aus, dass die Kraft nach unendlicher Zeit verschwindet, weil dies gerade der Fall ist, wo die Lamé'sche Gleichung $n = 5$ in eine Lamé'sche Gleichung $n = 4$ ausartet. Wir haben also noch die zwei Fälle zu unterscheiden, in denen wir während des letzten unendlichen Theiles unseres Zeitintervalls a) eine anziehende, und b) eine abstossende Kraft haben.

a) Hier sehen wir sofort die Richtigkeit unseres Lemmas ein, denn wir werden, indem wir uns dem Punkte e_i nähern, unendlich viele Oscillationen haben, und da die anziehende Kraft nicht unendlich schwach werden darf, bleiben die Amplituden dieser Oscillationen endlich. In diesem Falle werden also *sämmtliche* Lösungen in der Nähe des singulären Punktes endlich bleiben.

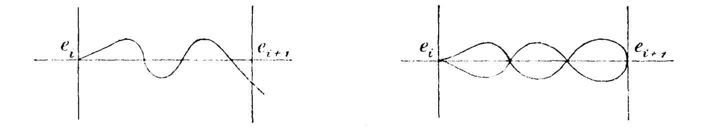
b) Da wir hier Abstossung während einer unendlich langen Zeit haben, wird der Massenpunkt *im Allgemeinen* ins Unendliche abgestossen werden. Indem wir aber den Massenpunkt von einer beliebigen Anfangslage mit verschiedenen Geschwindigkeiten projiciren, wird sich der Massenpunkt offenbar sehr verschiedenartig bewegen. Ist nämlich die Anfangsgeschwindigkeit entweder von dem Attractionscentrum weggerichtet oder aber, falls diese Geschwindigkeit klein ist, nach ihm zu, so wird der Massenpunkt schliesslich auf derselben Seite des Attractionscentrums ins Unendliche abgestossen werden, wie er zu Anfang lag. Wird er aber mit einer grossen nach dem Attractionscentrum gerichteten Geschwindigkeit projicirt, so wird er durch dasselbe hindurchgehen, um dann erst auf der anderen Seite ins Unendliche abgestossen zu werden. Indem wir nun den Massenpunkt immer nach dem Kraftcentrum hin projiciren, aber der Anfangsgeschwindigkeit der Reihe nach alle Werthe von einem sehr kleinen bis zu einem sehr grossen ertheilen, so wird es unter diesen Geschwindigkeiten *eine* geben müssen, für welche der Massenpunkt überhaupt nicht ins Unendliche abgestossen wird. Da ferner die Kraft mit wachsender Zeit nicht unendlich abnimmt, wird der Massenpunkt sich dem Kraftcentrum schliesslich unendlich nähern, ohne es aber in endlicher Zeit zu erreichen. Wir sehen also, dass im Falle b) es nur eine Lösung giebt, welche im irregulären Punkte endlich bleibt, dass diese aber auch dort verschwindet.

Dem soeben bewiesenen Lemma zufolge wird jede Hüllcurve des Segmentes $e_i m_1$ jetzt, wo e_i mindestens ein dreifacher Punkt ist, noch immer dieselbe Gestalt haben wie früher, als e_i ein zweifacher Punkt war. Wir sehen also, dass auch hier das Oscillationstheorem seine

Gültigkeit nicht mehr allgemein behalten kann. Um uns aber über die Sachlage volle Klarheit zu verschaffen, müssten wir noch die bis jetzt ausgeschlossene letzte Tangente der Hüllcurve genauer betrachten, welche durch den Punkt e_i der x-Axe hindurchgeht*). Es ist nämlich nicht mehr klar, da wir keine Exponenten zu Hülfe nehmen können, dass diese letzte Tangente bei wachsender Oscillationszahl immer steiler wird und sich der verticalen Lage als Grenzlage nähert. Es ist vielmehr denkbar, dass alle Hüllcurven dieselbe letzte Tangente haben sollten, und wenn dies der Fall wäre, so würde das Oscillationstheorem unter Umständen seine Gültigkeit behalten. Da es mir aber nicht gelungen ist, diesen Punkt zu entscheiden, so will ich an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen.

Schliesslich sind noch solche Segmente zu betrachten, deren *beide* Endpunkte zweifache oder mehrfache singuläre Punkte der Lamé'schen Gleichung sind. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Das Segment erstrecke sich vom mehrfachen singulären Punkte e_i zum nächsten singulären Punkte e_{i+1}, welcher ein einfacher sein mag, und von da bis e_i zurück. Hier müssen zwei Zweige einer Lamé'schen Function, welche im Punkte e_{i+1} zusammenhängen, im Punkte e_i beide Null sein und können also nicht linear unabhängig von einander sein. Dies ist aber nur möglich**), wenn sie entweder mit einander identisch sind, in welchem Falle sie im Punkte e_{i+1} zum Exponenten 0 gehören müssen (vergl. die erste der untenstehenden Figuren), oder wenn die eine die negative von der anderen ist, in welchem Falle sie im Punkte e_{i+1} zum Exponenten $\frac{1}{2}$ gehören müssen (vergl. die zweite Figur). Im ersteren Falle werden wir im



Doppelintervall offenbar eine ungerade Anzahl von Halboscillationen haben, im zweiten eine gerade Anzahl. Wir können also diesen Fall durch folgenden Satz auf einen schon erledigten Fall zurückführen:

*) Denn der Punkt A der früheren Figuren fällt jetzt in diesen Punkt hinein.

**) Man vergleiche wegen des hier nicht ins Einzelne ausgeführten Gedankenganges den nächsten Paragraphen, in welchem aber natürlich die Frage eine andere ist.

Ist die Oscillationszahl m des Segmentes $e_i e_{i+1} e_i$ eine gerade, gleich $2m'$, so ist die entsprechende Hüllcurve dieselbe, welche im Segmente $e_i e_{i+1}$ der Ocillationszahl m' entspricht. Ist aber m eine ungerade Zahl $2m'+1$, so bekommt man die entsprechende Hüllcurve, indem man beim Segmente $e_i e_{i+1}$ im Punkte e_{i+1} an Stelle der Bedingung $y = 0$ die Bedingung $\frac{dy}{dt} = 0$ anwendet.

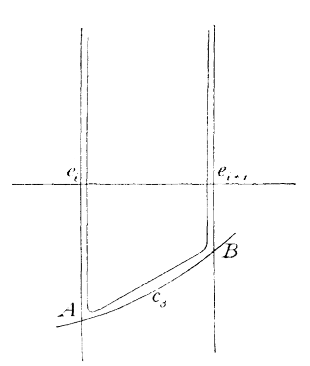
Es ist ersichtlich, dass auch in letzterem Falle die Hüllcurven dieselbe Gestalt haben werden, wie die in der Figur S. 176. Im eben besprochenen Falle verhält es sich also mit dem Oscillationstheorem genau ebenso wie in dem Falle, in welchem nur der eine Endpunkt des Segmentes ein mehrfacher Punkt ist.

b) Das Segment erstrecke sich einfach von einem mehrfachen Punkte e_i zu einem anderen mehrfachen Punkte e_{i+1}. Hier behaupten wir, *dass es überhaupt keine Lage der Hülfsgeraden giebt, welche im Segmente eine endliche Anzahl von Oscillationen hervorruft.* Um diese Behauptung zu begründen, legen wir, und dies ist wie wir wissen keine wesentliche Specialisirung, den einen Endpunkt des Segmentes in den Punkt ∞. Dann nimmt die Lamé'sche Gleichung die Form an (vergl. S. 166):

$$\frac{d^2y}{dt_1^2} = [Ax + B] \cdot y,$$

und nun sehen wir sofort, dass eine Hülfsgerade $y = Ax + B$ entweder im ganzen Zeitintervall Abstossung liefert und folglich keine Oscillation verursacht, oder aber Anziehung während einer unendlich langen Zeit liefert und folglich unendlich viele Oscillationen hervorruft.

In diesem Falle ist also das Oscillationstheorem niemals aufrecht zu erhalten.



Man erklärt übrigens leicht, wie die Hüllcurve jetzt vollständig verschwindet. Die continuirliche Aenderung der Gestalt der Hüllcurve wird nämlich durch die nebenstehende Figur klar gemacht, indem man sieht, wie die Hüllcurve in die Ecken A und B, welche die Curve dritter Ordnung C_3 mit den Ordinaten in e_i und e_{i+1} macht, hineingepresst wird, während der Theil der Curve zwischen A und B immer gerader wird und folglich, da die Curve als Enveloppe zu betrachten ist, in der Grenze verschwindet.

§ 5. Das Oscillationstheorem bei geschlossenen Segmenten.

Wenn ein Segment $m_1 m_2$ in einem Intervalle liegt, welches von zwei einfachen singulären Punkten begrenzt ist, kann das Segment, wie wir schon gesehen haben, gegebenenfalls das Intervall mehrfach überdecken. In diesem Paragraphen wollen wir uns mit dem Falle beschäftigen, in dem das Segment das betreffende Intervall genau ein-, zwei- etc. mal umgiebt, so dass die Punkte m_1 und m_2 zusammenfallen. Zunächst ist dies natürlich keine wesentliche Specialisirung und bedarf keiner besonderen Behandlung. Wir wollen aber jetzt unser Problem gewissermassen modificiren, indem wir, anstatt in den Punkten m_1, m_2 Nullpunkte der Lamé'schen Function vorzuschreiben (oder wie wir es im verallgemeinerten Oscillationstheorem gethan haben, die Werthe von $\frac{\frac{dE}{dt}}{E}$ dort beliebig vorzuschreiben), diese Endpunkte $e_1 e_2$ einfach wegwischen und verlangen, dass das Segment nach k-maliger Umspannung des Intervalles wieder in sich selbst zurücklaufen soll. Diese Ausdrucksweise soll natürlich bedeuten, dass wir von der Lamé'schen Curve verlangen wollen, sie soll, nachdem wir sie durch das ganze Segment hin und her verfolgt haben, im Endpunkte m_2^* sich an ihren ersten Theil continuirlich anschliessen, so dass, wenn wir das Segment wieder durchlaufen, wir genau dieselbe Lamé'sche Curve bekommen wie vorhin. Uebrigens werden wir nach wie vor m Halboscillationen der Lamé'schen Curve im Segmente verlangen. Wir haben jetzt zu zeigen, wie dieses Problem auf das schon betrachtete Oscillationstheorem zurückzuführen ist.

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall, wo das Segment das Intervall $e_i e_{i+1}$ *einmal* umspannt, so können wir folgenden Satz aufstellen:

Wenn nicht sämmtliche Lösungen einer Lamé'schen Gleichung nach einmaliger Umlaufung eines Intervalles $e_i e_{i+1}$ in sich selbst zurücklaufen, so wird keine Lösung dieser Gleichung es thun, welche nicht in beiden Endpunkten des Intervalles zu einem und demselben der dort vorhandenen Exponenten $0, \frac{1}{2}$ gehört.

Um diesen Satz zu begründen, wollen wir zunächst zeigen, dass eine Lösung E der Lamé'schen Gleichung, welche im Punkte e_i keine Fundamentallösung ist, nicht in sich selbst zurücklaufen kann, es sei denn, dass es auch alle anderen Lösungen thun. Es sei $E = E_1 + E_2$, wo E_1 und E_2 Fundamentallösungen im Punkte e_i

sind, welche zu den Exponenten 0 bezw. $\frac{1}{2}$ gehören. Indem das Segment am Punkte e_i umkehrt, wird dieser Zweig E offenbar durch die Werthe $E_1 - E_2$ fortgesetzt. Wenn also E nach einmaliger Umkreisung des Intervalles $e_i e_{i+1}$ in sich selbst zurücklaufen soll, so müssen, indem wir von e_i bis e_{i+1} gehen, die Zweige $E_1 + E_2$ und $E_1 - E_2$ im Punkte e_{i+1} in einander übergehen. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass die Werthe von $E_1 + E_2$ und $E_1 - E_2$ im Punkte e_{i+1} einander gleich sein sollen, während die Werthe ihrer ersten Ableitungen nach t einander entgegengesetzt gleich sind. Dies wird aber dann und nur dann geschehen, wenn im Punkte e_{i+1} $E_2 = 0$ und $\frac{dE_1}{dt} = 0$. Wenn dies aber der Fall ist, werden auch *sämmtliche* Lösungen der Lamé'schen Gleichung nach einmaliger Umlaufung des Segmentes in sich selbst zurückkehren, denn es kann ja jede solche Lösung in der Gestalt $LE_1 + ME_2$ dargestellt werden.

Andererseits ist es ohne Weiteres klar, dass, wie die anderen Lösungen der Lamé'schen Gleichung auch verlaufen mögen, eine Lamé'sche Function, welche in beiden Punkten e_i und e_{i+1} eine Fundamentallösung ist, dann und nur dann nach einmaliger Umkreisung des Segmentes in sich selbst zurückkehren wird, wenn sie in beiden Punkten e_i und e_{i+1} zum Exponenten Null oder in beiden Punkten zum Exponenten $\frac{1}{2}$ gehört; und hiermit ist der oben stehende Satz bewiesen.

Hieran anknüpfend bekommen wir nun folgenden Satz:

Wir können die Lamé'schen Functionen, welche nach einmaliger Umlaufung des Intervalles $e_i e_{i+1}$ in sich selbst zurücklaufen und innerhalb des so beschriebenen geschlossenen Segmentes $2k$-mal) verschwinden, dadurch mittelst des Oscillationstheorems bestimmen, dass wir, das einfache Segment $e_i e_{i+1}$ ins Auge fassend, erstens die Lamé'schen Functionen bestimmen, welche in den Punkten e_i und e_{i+1} verschwinden und zwischen diesen Punkten noch $k-1$-mal verschwinden und zweitens diejenigen, deren erste Ableitungen nach t in e_i und e_{i+1} verschwinden, und welche selber k-mal zwischen diesen Punkten verschwinden.*

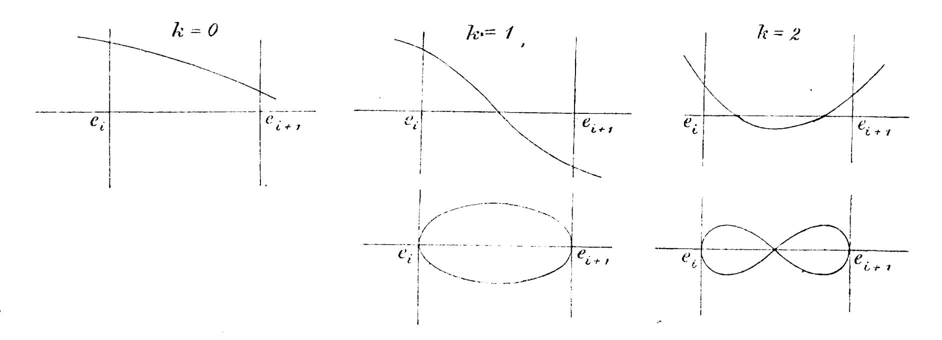
Wir bekommen hierdurch Lamé'sche Curven, welche in den Fällen $k = 0, 1, 2$ schematisch durch folgende Figuren dargestellt werden.

Natürlich besitzt jede dieser Functionsarten für jeden Werth von k ihre eigene Hüllcurve; und es werden im Allgemeinen die zwei

---

*) Die Anzahl von Nullstellen *muss* hier offenbar eine gerade sein.

Lamé'schen Functionen, welche dieselbe Anzahl $2k$ von Nullstellen im geschlossenen Segmente haben, aber sich in den Endpunkten des Intervalles verschieden verhalten, ganz verschiedene Hüllcurven besitzen. Es bietet sich hier die Frage, ob derartige zwei Hüllcurven eine gemeinsame Tangente besitzen oder nicht. In der That wird eine solche Tangente genau dem oben besprochenen Fall entsprechen, dass *alle* Lamé'sche Functionen nach Umkreisung des betreffenden Segmentes in sich selber zurückkehren, nachdem sie erst $2k$-mal verschwunden sind. Auf die Beantwortung dieser Frage, welche bei unseren späteren Anwendungen nicht wieder auftreten wird, müssen wir jedoch verzichten.

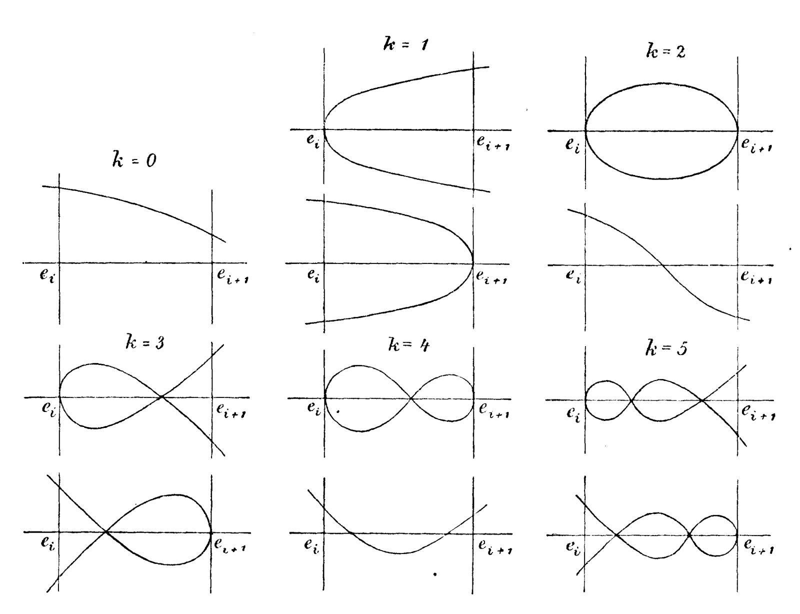


Indem wir nun beim allgemeinen geschlossenen Segmente ganz ähnliche Betrachtungen anstellen, wie wir es hier im einfachsten Falle ausführlich gethan haben, kommen wir auf folgenden Satz:

Wir können die Lamé'schen Functionen, welche nach l-maliger Umlaufung des Intervalles $e_i e_{i+1}$ in sich selbst zurückkehren und innerhalb des so beschriebenen geschlossenen Segmentes $2k$-mal verschwinden, dadurch mittelst des Oscillationstheorems bestimmen, dass wir das nicht geschlossene Segment ins Auge fassen, welches von e_i als Endpunkt ausgehend die Hälfte des geschlossenen Segmentes ausfüllt, und nun erstens diejenigen Lamé'schen Functionen bestimmen, welche in den Endpunkten dieses Segmentes gleich Null sind und innerhalb desselben $(k-1)$-mal verschwinden; und zweitens diejenigen Lamé'schen Functionen auswählen, deren erste Ableitungen nach t in den Endpunkten des Segmentes Null sind und welche selber k-mal innerhalb des Segmentes verschwinden.

Wenn nun l gerade ist, welcher Fall uns im Folgenden allein interessiren wird, so lässt sich dieses Theorem noch etwas vereinfachen. In der That sehen wir, dass dann das oben benutzte halbe Segment, welches im Punkte e_i anfängt, in demselben Punkte endigen wird. Bezeichne man also mit E den Zweig, welcher vom Anfangspunkte e_i ausläuft, und mit $\overline{E}$ den Zweig, durch welchen man in den

Endpunkt e_i gelangt. Dann müssen dem obigen Satze gemäss E und $\overline{E}$ nicht nur beide Fundamentallösungen in e_i sein, sondern dort auch zu demselben Exponenten gehören; E und $\overline{E}$ können sich also nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Wenn wir nun den Zweig E von e_i ausgehend durch ein Viertel des geschlossenen Segmentes verfolgen, und zugleich $\overline{E}$ ebenfalls durch ein Viertel des geschlossenen Segmentes von e_i ausgehend rückwärts verfolgen, so müssen am Ende dieses Viertelsegmentes (welches nothwendig im Punkte e_i oder e_{i+1} liegen wird) $\overline{E}$ und E in einander übergehen; da sie aber noch immer durch dasselbe constante Multiplum von einander verschieden sein müssen wie in e_i, so sehen wir



sofort, dass sie am Ende des Viertelsegmentes zum einen oder zum anderen der beiden dort vorhandenen Exponenten gehören müssen. Hierdurch gewinnen wir folgenden Satz:

Wenn l gerade ist, so betrachte man das nicht geschlossene Segment, welches von e_i ausgehend ein Viertel des geschlossenen Segmentes umfasst. Hierauf wende man das Oscillationstheorem an, indem man:

a) *wenn k gerade ist, erstens diejenigen Lamé'schen Functionen aufsucht, welche in den Endpunkten dieses Viertelsegmentes Null sind und innerhalb desselben $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$-mal verschwinden, und zweitens diejenigen Lamé'schen Functionen, deren erste Ableitungen nach t in den End-*

punkten des Viertelsegmentes den Werth Null haben, und selbst innerhalb desselben $\frac{k}{2}$*-mal verschwinden;*

b) *wenn k ungerade ist, erstens diejenigen Lamé'schen Functionen aufsucht, welche im Endpunkte* e_i *des Viertelsegmentes verschwinden, während im anderen Endpunkte ihre ersten Ableitungen nach t den Werth Null haben, zweitens diejenigen Functionen, deren erste Ableitungen in* e_i *den Werth Null haben, während die Functionen selber im anderen Endpunkte verschwinden; jedesmal aber verlange man* $\frac{k-1}{2}$ *Nullstellen innerhalb des Viertelsegmentes.*

Für den einfachsten Fall $l = 2$, der uns später besonders interessiren wird, bekommen wir die schematischen Figuren auf S. 184.

Kapitel 2.

Ueber die Lamé'schen Producte, welche zu ausgearteten Systemen cyclidischer Coordinaten gehören.

§ 1. Die Lamé'schen Producte für die siebzehn Coordinatensysteme von Seite 102—104.

Im vorigen Abschnitte haben wir die Lamé'schen Producte nur für die zwei allgemeinen cyclidischen Coordinatensysteme I′a) und I″a) (die Systeme A) und B) von Seite 102) gebildet. Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst zusehen, wie wir den Grenzübergang zu den Fällen II a) und III a) machen können.

Zu dem Zwecke werden wir die Substitution machen: $x_i \sim \sqrt{a_i} \cdot x_i$, so dass also die Identität die Form annimmt $\sum_1^5{}_i\, a_i x_i^2 = 0$, und die Gleichung der Cyclidenschaar die Gestalt $\sum_1^5{}_i \frac{a_i x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$. Hierdurch erhält dann unser Potential V die Gestalt:

$$V = \left(\frac{\sum_1^5{}_i \frac{\sqrt{a_i}\, x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5{}_i\, e_i a_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(\mu, \nu, \varrho).$$

Die partielle Differentialgleichung, welcher das ψ genügt, ist dabei gar nicht geändert worden. Wenn wir nun die Grenzübergänge machen,

die uns auf Seite 57—58 zu den Kategorien II und III geführt haben, so geht der Factor, mit welchem ψ in V multiplicirt ist, in folgenden über:

$$\left(\frac{\sum_1^5 c_i x_i}{\sqrt{e_1(2x_1 x_2) + x_1^2 + e_3 x_3^2 + e_4 x_4^2 + e_5 x_5^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

bezw.

$$\left(\frac{\sum_1^5 c_i x_i}{\sqrt{e_2(2x_1 x_3 + x_2^2) + 2x_1 x_2 + e_1 x_4^2 + e_5 x_5^2}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$\sum_1^5 c_i x_i = 0$ soll dabei beidemal die Gleichung der unendlich fernen Punktkugel sein. Die neuen Functionen ψ aber müssen natürlich ihrerseits partiellen Differentialgleichungen genügen, welche durch unsere Grenzübergänge aus der ursprünglich für ψ geltenden partiellen Differentialgleichung entstehen. Da aber die Grössen a_i hier überhaupt nicht in Betracht kommen, so gestalten sich diese Grenzübergänge ausserordentlich einfach, indem sie auf ein blosses Gleichsetzen zweier bezw. dreier e_i hinauskommen. Dies gilt natürlich auch für die Lamé'sche Gleichung, welche wir bekommen, wenn wir ψ als Lamé'sches Product annehmen. Wir erhalten somit folgenden Satz:

In dem Falle II a) bezw. III a) können die drei Factoren des Lamé'schen Productes als irgend welche drei Lösungen einer Lamé'schen Gleichung angenommen werden, welche nur in soweit particularisirt ist, als sie im ersten Falle neben drei einfachen einen zweifachen singulären Punkt besitzt, im zweiten Falle aber neben zwei einfachen einen dreifachen singulären Punkt.

Wir werden also in der bezüglichen Lamé'schen Gleichung einfach zwei bezw. drei der e_i einander gleich zu setzen haben.

Nur in den Fällen I a), II a), III a), welche wir jetzt behandelt haben, sind, wie wir wissen, die krummlinigen Coordinaten μ, ν, ϱ alle drei unmittelbar definirt, in allen anderen Fällen müssen einige von ihnen erst durch einen Hülfsgrenzübergang eingeführt werden. Nun wird für diejenigen krummlinigen Coordinaten, welche in irgend welchem Falle ohne Weiteres vorhanden sind, der Grenzübergang für die zugehörige Lamé'sche Gleichung einfach darin bestehen, dass wir die singulären Punkte der Differentialgleichung genau so zu mehrfachen singulären Punkten zusammenrücken lassen, wie dies durch die Schemata der auf Seite 65—69 mitgetheilten Tabelle angegeben wird. *Die Vertheilung der jedesmaligen Multiplicität der e_i auf verschiedene Elementartheiler* (wie sie in der Tabelle für jeden Fall ausführlich

angegeben wird) *scheint dabei zunächst nicht in Betracht zu kommen,* und wir werden sehen, dass unter den Beschränkungen, welche wir uns in diesem Paragraphen auferlegen, dies in der That der Fall ist. Zu dem Zwecke müssen wir untersuchen, was beim Grenzübergange aus denjenigen Lamé'schen Gleichungen wird, welche den krummlinigen Coordinaten entsprechen, die in den jedesmal verschwindenden Intervallen verloren gehen. Wir wollen uns in dieser Hinsicht im gegenwärtigen Paragraphen auf die Coordinatensysteme der Tabelle von Seite 102—104 beschränken, d. h. auf die Fälle, in welchen die ohne Weiteres vorhandenen Flächenschaaren durch blosse Kugelbüschel ergänzt werden.

Fassen wir zunächst diejenigen Fälle ins Auge, bei denen eine Doppelwurzel (11) auftritt, bei denen also das Cyclidensystem durch einen Kugelbüschel mit eigentlichem (nicht in einen Punkt ausgeartetem) Grundkreis ergänzt werden muss. Der bequemeren Ausdrucksweise halber wollen wir die zusammenfallenden Punkte e_1 und e_2 nennen. Setzen wir dann nach der Seite 100 gegebenen Vorschrift:

$$e_2 = e_1 + \varepsilon, \quad \lambda = e_1 + \varepsilon\lambda', \quad \varphi = \int \frac{d\lambda'}{2\sqrt{\lambda'(1-\lambda')}},$$

so nimmt die Lamé'sche Gleichung (Formel (3) S. 117) die Gestalt an:

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = C \cdot E,$$

wo wir der Kürze halber gesetzt haben:

$$C = \frac{\frac{1}{4}e_1{}^3 + \frac{3}{4}(e_3 + e_4 + e_5)e_1{}^2 + Ae_1 + B}{(e_3 - e_1)(e_4 - e_1)(e_5 - e_1)}.$$

Diese Gleichung ist eine Lamé'sche Gleichung $n = 4$, bei welcher $\lambda' = 0$ und $\lambda' = 1$ einfache singuläre Punkte sind, $\lambda' = \infty$ aber ein zweifacher singulärer Punkt ist. *Das auf Seite* 102—104 *gegebene Schema des ergänzenden Kugelbüschels giebt also nicht unmittelbar die Multiplicität der singulären Stellen der Lamé'schen Gleichung, sondern die Multiplicität* (3) *des Punktes* ∞ *im Schema muss um Eins erniedrigt werden, und dementsprechend haben wir nicht mehr eine Lamé'sche Gleichung* $n = 5$, *sondern eine* $n = 4$ *vor uns.*

Natürlich können wir jetzt die zugehörige Lamé'sche Function in der Gestalt schreiben:

$$E = L \sin(\sqrt{-C} \cdot \varphi) + M \cos(\sqrt{-C} \cdot \varphi).$$

Ist insbesondere der Grundkreis des Kugelbüschels nulltheilig und also der Winkel φ imaginär, so führen wir (vergl. Seite 101) die neue reelle Variable ein:

$$r = e^{i\varphi},$$

wonach die Lamé'sche Function die Form annimmt:

$$E = L r^{\sqrt{-C}} + M r^{-\sqrt{-C}}.$$

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass *zwischen den accessorischen Parametern A, B der ursprünglichen Lamé'schen Gleichung und dem einen accessorischen Parameter C der abgeleiteten Gleichung eine lineare nicht-homogene Beziehung stattfindet.*

Jetzt gehen wir zu den Fällen über, wo ein dreifacher Punkt (21) oder ein vierfacher Punkt (31) in dem zunächst vorhandenen Schema auftritt, wo also der neu einzuführende Kugelbüschel einen Punktgrundkreis besitzt. Machen wir hier im Falle eines Punktes (21) den Grenzübergang:

$$e_3 = e_1 + \varepsilon, \quad \lambda = e_1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \lambda', \quad z = \int \frac{d\lambda'}{2\sqrt{\lambda'}},$$

im Falle eines Punktes (31) den Grenzübergang:

$$e_4 = e_1 + \varepsilon, \quad \lambda = e_1 + \varepsilon + \varepsilon^3 \lambda', \quad z = \int \frac{d\lambda'}{2\sqrt{\lambda'}},$$

so nimmt die Lamé'sche Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{d^2E}{dz^2} = C \cdot E,$$

wo die Constante C die Werthe hat:

$$\frac{e_1{}^3 + \frac{3}{4}(e_4 + e_5)e_1{}^2 + Ae_1 + B}{(e_1 - e_4)(e_1 - e_5)} \text{ bezw. } \frac{\frac{7}{4}e_1{}^3 + \frac{3}{4}e_5 e_1{}^2 + Ae_1 + B}{(e_1 - e_5)}.$$

Diese Gleichung ist wieder eine Lamé'sche Gleichung $n = 4$, in welcher $\lambda' = 0$ ein einfacher, $\lambda' = \infty$ ein dreifacher Punkt ist. Hier ist also wiederum die Multiplicität des Punktes $\lambda' = \infty$, wie sie durch das Schema des ergänzenden Kugelbüschels gegeben wird, um eine Einheit zu verkleinern.

Hiermit haben wir nun alle Grenzübergänge in Betracht gezogen, welche bei den siebzehn Coordinatensystemen von Seite 102—104 vorkommen, mit Ausnahme derjenigen Grenzübergänge, welche wir gebraucht haben, um das aus lauter Kugeln bestehende Coordinatensystem R) herzustellen. Wir haben also noch diese Grenzübergänge bei der Lamé'schen Gleichung vorzunehmen.

Setzen wir denn in der Lamé'schen Gleichung, welche dem Falle IIa) entspricht:

$$\lambda = e_5 + \varepsilon_5 \mu', \quad z = \int \frac{d\mu'}{2\sqrt{\mu'}},$$

so nimmt dieselbe die Form an:

$$\frac{d^2 E}{d z^2} = \varepsilon_5 C_5 \cdot E,$$

wo:

$$C_5 = \frac{-\frac{5}{4} e_5^3 + \frac{3}{4}\left(\sum_1^5 {}_i e_i\right) e_5^2 + A e_5 + B}{(e_5 - e_1)^2 (e_5 - e_3)(e_5 - e_4)}.$$

Beachten wir nun (vergl. S. 98), dass $\frac{a^2 \varepsilon_5}{(e_5 - e_1)^2} = 1$, und setzen wir:

$$a = \infty, \quad \frac{A}{a^2} = A_1, \quad \frac{B}{a^2} = B_1,$$

so nimmt die Lamé'sche Gleichung die Form an:

$$\frac{d^2 E}{d z^2} = k_5 \cdot E,$$

wo:

$$k_5 = \frac{A_1 e_5 + B_1}{(e_5 - e_3)(e_5 - e_4)}.$$

Wenn wir nun in dieser Differentialgleichung k_5 durch k_4 bezw. k_3 ersetzen, wo:

$$k_4 = \frac{A_1 e_4 + B_1}{(e_4 - e_3)(e_4 - e_5)}, \qquad k_3 = \frac{A_1 e_3 + B_1}{(e_3 - e_4)(e_3 - e_5)},$$

und zugleich z durch y bezw. x, bekommen wir offenbar die Differentialgleichtungen für die anderen zwei Factoren des Lamé'schen Productes. Diese drei Differentialgleichungen sind wieder Lamé'sche Gleichungen $n = 4$ mit einem dreifachen singulären Punkte im Unendlichen (während das Schema des entsprechenden Kugelbüschels einen vierfachen Punkt dort hat) und einem einfachen singulären Punkte im Nullpunkte. Die drei Factoren des Lamé'schen Productes sind nun natürlich:

$$L_3 \sin(\sqrt{-k_3}\, x) + M_3 \cos(\sqrt{-k_3}\, x),$$
$$L_4 \sin(\sqrt{-k_4}\, y) + M_4 \cos(\sqrt{-k_4}\, y),$$
$$L_5 \sin(\sqrt{-k_5}\, z) + M_5 \cos(\sqrt{-k_5}\, z).$$

Es ist ferner zu bemerken, dass die drei accessorischen Parameter k_3, k_4, k_5 durch die lineare Relation verbunden sind:

$$k_3 + k_4 + k_5 = 0.$$

Schliesslich fassen wir die Resultate dieses Paragraphen folgendermassen zusammen:

Für jedes der ziebzehn krummlinigen Coordinatensysteme A) — R) *kann man Lamé'sche Producte aufstellen, deren drei Factoren Lamé'sche Functionen sind. Diejenigen dieser Lamé'schen Functionen, welche den*

unmittelbar vorhandenen (nicht zu Kugelbüscheln ausgearteten) Flächenschaaren entsprechen, gehören zum Falle $n = 5$ und ihre singulären Punkte sind der Lage und der Multiplicität nach durch die Schemata der Flächenschaaren gegeben. Dagegen gehören diejenigen Lamé'schen Functionen zum Falle $n = 4$, welche Kugelbüscheln entsprechen, und ihre singulären Stellen werden der Lage und der Multiplicität nach durch die Schemata des Kugelbüschels gegeben, nur ist dabei die Multiplicität des im Unendlichen liegenden mehrfachen Punktes dieser Schemata jedesmal um Eins zu vermindern.

Jedes Schema der Tabelle von Seite 102—104, *welches zu einer oder mehreren Schaaren von nicht zerfallenden Flächen gehört, liefert zwei accessorische Parameter in der Lamé'schen Gleichung. Jedes Schema aber, welches einem Kugelbüschel angehört, liefert nur einen accessorischen Parameter. Alle accessorischen Parameter aber, welche bei einem und demselben Coordinatensystem auftreten, sind in der Weise durch lineare Beziehungen mit einander verbunden, dass, wenn irgend welche zwei von ihnen beliebig festgelegt werden, die übrigen dadurch bestimmt sind.*

§ 2. Die Lamé'schen Producte für beliebige Ausartungen des cyclidischen Coordinatensystems.

Wie schon früher bemerkt wurde, ist die Tabelle von Seite 102—104 nur insofern eine vollständige, als in ihr alle dreifach orthogonalen Flächensysteme, welche als Ausartungen des allgemeinen cyclidischen Systems angesehen werden können, einmal auftreten. Wir wissen aber, dass es viele andere Grenzübergänge zu den verschiedenen ausgearteten Fällen giebt, als gerade diejenigen jener Tabelle. Der Vollständigkeit halber müssen wir also noch solche Grenzübergänge in Betracht ziehen, bei denen ein Kugelbüschel als zunächst vorhandene ausgeartete Cyclidenschaar angesehen wird, welche dann vermittelst Hülfsgrenzübergang durch allgemeinere Flächenschaaren ergänzt werden muss. Wir wollen nun in diesem Paragraphen zeigen, dass, *durch welche Grenzübergänge man auch zu einem gewissen Coordinatensystem kommen mag, man immer auf dieselben Lamé'schen Producte geführt wird.*

Gehen wir zunächst vom Kugelbüschel mit eintheiligem Grundkreis I' c_2) aus. In dem Schema dieser Cyclidenschaar haben wir einen dreifachen Punkt und zwei einfache Punkte; also haben wir zunächst als entsprechenden Factor des Lamé'schen Productes eine Lamé'sche Function $n = 5$ mit einem dreifachen singulären Punkte. Dagegen fanden wir im vorigen Paragraphen, dass diesem Kugel-

büschel eine Lamé'sche Gleichung $n = 4$ mit einem zweifachen singulären Punkte entspricht. Dieser Widerspruch wird folgendermassen aufgehoben: Von dem Kugelbüschel ausgehend machen wir einen Hülfsgrenzübergang zu irgend welchen ergänzenden Flächenschaaren (etwa nach Vorschrift von S. 97 zu Rotationscycliden $I' b_1$)). Indem wir denselben Grenzübergang in der dem Kugelbüschel entsprechenden Lamé'schen Gleichung machen, bekommen wir eine neue Lamé'sche Gleichung $n = 5$ mit den einfachen singulären Punkten 0, f_1, f_2 und dem zweifachen singulären Punkte ∞. Nun stellt sich aber durch leichte Rechnung heraus, dass, sofern der eine accessorische Parameter der neuen Lamé'schen Gleichung nicht unendlich sein soll, die accessorischen Parameter a, b der ursprünglichen Lamé'schen Gleichung nicht beliebig gewählt sein dürfen, sondern der Gleichung $ae_1 + b = 0$ genügen müssen. Dies ist aber (vergl. S. 167) geradezu die Bedingung dafür, dass die Lösungen dieser Gleichung nach Abtrennung des Factors $(\lambda - e_1)^{-\frac{1}{4}}$ in den Fall $n = 4$ ausarten. Hierdurch sind wir geradezu auf das Resultat des vorigen Paragraphen gekommen, nur dass wir dort den Factor $(\lambda - e_1)^{-\frac{1}{4}}$ nicht hatten, weil damals e_1 im Unendlichen lag. Aehnliches gilt nun auch für alle anderen Fälle dieser Art, wie wir durch folgenden Satz notiren wollen*):

Die Schemata der Tabelle Seite 65—69 geben die Lage und die Multiplicität der singulären Punkte der Lamé'schen Functionen $n = 5$ an, welche zu den entsprechenden Flächenschaaren gehören. Wenn aber e_i ein mehrfacher Punkt eines Schemas ist, welchem drei verschiedene Elementartheiler entsprechen, so müssen die accessorischen Parameter dieser Lamé-schen Function in der Weise specialisirt werden, dass die Lamé'sche Function nach Abtrennung des Factors $(\lambda - e_i)^{-\frac{1}{4}}$ in den Fall $n = 4$ ausartet.

Diesen Satz, dessen Begründung wir bis jetzt nur für den Fall $I'c_2$) angedeutet haben, können wir nun folgendermassen allgemein ohne jede Rechnung beweisen.

Fassen wir zunächst die Fälle ins Auge, in denen ein dreifacher Punkt (111) im Schema vorkommt**). In diesem dreifachen Punkte sind zwei Intervalle verloren gegangen, welchen eigentliche Flächen-

---

*) Hier sind die Fälle I e), I f), II g), bei denen überhaupt keine Flächenschaar vorhanden ist, ganz ausser Betracht gelassen.

**) Also die Fälle $I'c_1$), $I'c_2$), $I''c$), II c). Dies sind alle die Fälle, bei welchen wir es mit einem Kugelbüschel mit eigentlichem (nicht verschwindendem) Grundkreise zu thun haben.

schaaren entsprechen *). Wenn also nicht unendlich starke Oscillation in den Werthen des Lamé'schen Productes beim Uebergange von irgend einer Fläche einer dieser Schaaren zu irgend einer anderen eintreten soll, so muss (vergl. Seite 172) die Kraft in den zwei verschwindenden Intervallen unendlich schwach gemacht werden, d. h. die Hülfsgerade der ursprünglichen Lamé'schen Gleichung muss durch den dreifachen Punkt hindurchgehen, und es wird hiernach die Lamé-sche Function in der angegebenen Weise ausarten.

Nun scheinen die obigen Betrachtungen ohne Weiteres auf den Fall eines mehrfachen Punktes (21) oder (31) anwendbar zu sein. Dem ist aber nicht so, denn wie man an den Grenzübergängen von S. 95—96 sieht, variirt der Parameter λ der Schaar, welche hier verloren gegangen ist, nicht über das ganze verschwindende Intervall, sondern nur über Segmente desselben, welche unendlich klein von einer Ordnung sind, die um eine Einheit kleiner ist als die Multiplicität des betreffenden Punktes. Dies bewirkt aber gerade, wie leicht nachzurechnen ist, dass das entsprechende Zeitintervall in unserem mechanischen Hülfsproblem nicht wie oben unendlich wird, sondern endlich bleibt. Die Kraft braucht also nicht mehr unendlich schwach zu sein und hierdurch ist jeder Grund aufgehoben, weshalb die accessorischen Parameter noch specialisirt werden sollten.

Dagegen bei einem Punkte (211) oder (311) d. h. in den Fällen II f) und III d), ist das Segment, über welches λ variirt, zwar auch unendlich kurz in Vergleich zu den ganzen Intervallen, aber nur von einer Ordnung, die um *zwei* Einheiten kleiner ist als die Multiplicität des betreffenden Punktes. Hiernach wird das betreffende Zeitintervall unendlich, und es müssen wiederum die accessorischen Parameter gerade so specialisirt werden wie vorhin.

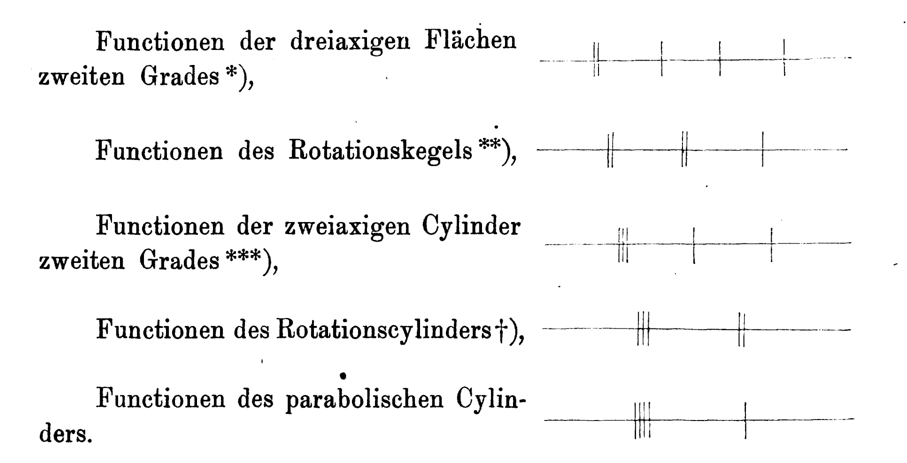
Auf die hier nur flüchtig berührten Punkte gehen wir hier um so lieber nicht näher ein, als wir später (Kapitel III, § 4) Gelegenheit haben werden, auf dieselben ausführlich zurückzukommen.

---

*) Wegen des Falles $I'c_2$), in dem die eine Flächenschaar in der unmittelbaren Nähe des dreifachen Punktes zu suchen ist, vergl. man § 4 des nächsten Kapitels.

§ 3. Allgemeine Zusammenfassung. Historischer Bericht über die Theorie der Lamé'schen Producte.

Wir haben in den voraufgehenden Paragraphen gefunden, dass ausser Lamé'schen Functionen $n = 4$, welche stets durch trigonometrische Functionen ausgedrückt werden können, noch verschiedene Lamé'sche Functionen $n = 5$ in unserer Theorie der Lamé'schen Producte vorkommen. Ausser den allgemeinen Lamé'schen Functionen $n = 5$, welche nur in den allgemeinen Fällen I'a) und I''a) vorkommen, finden wir noch folgende fünf Fälle. Wir geben die Multiplicität der singulären Punkte durch ein Schema an und belegen die Functionen zugleich mit Namen:



Man bemerke, dass die Lamé'sche Function $n = 5$ mit einem fünffachen singulären Punkt für uns nicht in Betracht kommt.

---

*) „Lamé'sche Functionen im engeren Sinne", nur dass bei uns die accessorischen Parameter ganz willkürlich bleiben.

**) Hierher gehören nicht nur die „Kegelfunctionen" von Mehler, sondern auch, da bei uns die Indices (accessorischen Parameter) ganz unbeschränkt sind, alle „Kugelfunctionen" und „Zugeordnete Functionen" Heine's. Ich selber habe in meiner Preisschrift diese Functionen „Kugelfunctionen eines Argumentes" benannt; doch scheint es zweckmässig, das Wort *Kugelfunction* im Sinne von Sir William Thomson zu gebrauchen, was auch mit der Heine'schen Bezeichnung nicht collidirt.

***) Von Heine, der die accessorischen Parameter wiederum specialisirte, „Functionen des *elliptischen* Cylinders" benannt.

†) Auch „Bessel'sche Functionen" benannt.

Nun ist es als ein Hauptergebniss dieses Kapitels anzusehen, dass dieselbe Art Lamé'scher Functionen bei sehr verschiedenen Flächensystemen auftreten kann. Dies stellen wir folgendermassen zusammen, indem wir jedesmal nur die einfachste Gestalt der betreffenden Flächenschaaren nennen, aus der alle anderen durch reelle Kreisverwandtschaft hervorgehen:

II a)	Allgemeine Flächen zweiten Grades.	Functionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades.
I′ b_3)	Kegel zweiten Grades.	
I′ b_1)	Rotationsringcycliden und zweitheilige Rotationscycliden.	
I′ b_2)	Zweitheilige Rotationscycliden.	
I″ b)	Eintheilige Rotationscycliden *).	
I′ d_2)	Rotationskegel.	Functionen des Rotationskegels.
I′ d_1)	Kreisringe.	
II b_1)	Rotationsflächen zweiten Grades (abgeplattete Ellipsoide und einschalige Hyperboloide).	
II b_2)	Rotationsflächen zweiten Grades (verlängerte Ellipsoide und zweischalige Hyperboloide).	
II d)	Cylinder zweiten Grades.	Functionen der zweiaxigen Cylinder zweiten Grades.
III a)	Allgemeine Paraboloide.	
II e)	Rotationscylinder.	Functionen des Rotationscylinders.
III b)	Rotationsparaboloide.	
III c)	Parabolische Cylinder.	Functionen des parabolischen Cylinders.

Diese Gruppirung verschiedenartiger Flächen findet durch die hier dargelegte Theorie eine höchst anschauliche gemeinsame Erklärung (K). In der That sind einfach solche Flächenschaaren (die Kugelbüschel ausgeschlossen) zusammengruppirt, deren Schemata, was die *Multiplicität* der Punkte angeht, übereinstimmen.

*) Die hier auftretenden Functionen unterscheiden sich natürlich von den Functionen der vier vorangehenden Fälle dadurch, dass zwei ihrer einfachen singulären Punkte einander conjugirt imaginär sind.

Uebrigens sind die Lamé'schen Producte für alle unsere siebzehn verschiedenen Coordinatensysteme, oder wenigstens für die einfachsten (symmetrischen) Gestalten derselben, bereits von früheren Autoren aufgestellt worden. Hierüber wollen wir jetzt einen kleinen historischen Bericht geben*). Dabei soll stets vorausgesetzt werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich behauptet wird, dass es sich nur um die symmetrische Form des betreffenden Coordinatensystems handelt (aus der die allgemeine Form durch Inversion entsteht).

Die Lamé'schen Producte für die Coordinatensysteme R) (Parallelebenen) und N) (Rotationscylinder etc.) gehen im Wesentlichen auf Euler (1764) zurück. Freilich beschäftigte sich derselbe nicht mit unserem Potentialproblem, sondern mit dem Problem der Schwingung gespannter Membranen, welches Problem aber, was die Aufstellung Lamé'scher Producte angeht, mit unserem Potentialproblem fast identisch ist. Für das Potentialproblem selber wurden die Lamé'schen Producte für das Coordinatensystem R) von Fourier (1812), für das Coordinatensystem N) in specieller Form von Fourier, dann aber allgemein von Poisson (1823) aufgestellt.

Dagegen sind die Lamé'schen Producte für das Coordinatensystem H) (gewöhnliche Polarcoordinaten) schon von Laplace (1782) gefunden worden.

Erst von Green (1833) und Lamé **) selbst wurden die Lamé'schen Producte im Falle I) (elliptische Coordinaten) aufgestellt. Einige Jahre später (1839) hat Lamé auch die Producte für das Coordinatensystem E) (Kegel zweiten Grades) abgeleitet. Dieselben sind aber in seinen späteren Werken, sowie auch von anderen Mathematikern wenig benutzt worden. Ebenfalls mit dem Namen Lamé's sind die Coordinatensysteme K) und L) (Rotationsflächen zweiten Grades) zu verbinden, der übrigens ursprünglich (1839) nicht bemerkte, dass die Functionen, auf welche man hier geführt wird, auf diejenigen zurück-

*) Genauere literarische Nachweise findet man in dem vom Verfasser geschriebenen Schlusskapitel des Byerly'schen Lehrbuches: Fourier's Series and Spherical harmonics, vergl. auch III, 3, § 7.

**) Hierbei scheint Green sehr wenig oder vielleicht gar keine Priorität zu haben. Green's Abhandlung wurde 1833 vorgelesen und 1835 gedruckt. Dagegen erscheint Lamé's erste Arbeit über diesen Gegenstand im Tome V der „Savants Étrangers", welcher das Datum 1838 trägt. Es ist aber kein Zweifel, dass diese Abhandlung schon früher erschienen war, denn erstens ist sie im zweiten Bande des Liouville'schen Journals (1837) schon abgedruckt, und zweitens wird sie in einer Arbeit von demselben Verfasser vom Jahre 1834 (Journal de l'École Polytechnique Cahier 23 S. 235) citirt. Die Abhandlung selber trägt kein Datum, der Band der Savants Étrangers enthält andere Abhandlungen von 1825 bis 1834.

kommen, die schon von Laplace eingeführt waren. Auf diese Uebereinstimmung hat zuerst Heine (1842) aufmerksam gemacht.

Als nächstbehandeltes Coordinatensystem ist das System G) (Kreisringe etc.) zu nennen. Die Lamé'schen Producte in diesem Falle wurden von C. Neumann (1864) aufgestellt; dieselben finden sich auch in einem Fragmente des Riemann'schen Nachlasses, welches nach einer Schlussbemerkung in den von Hattendorf herausgegeben Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen auf das Wintersemester 1860—61 zurückzugehen scheint.

C. Neumann hat ebenfalls (1862) die Lamé'schen Producte für das Coordinatensystem H) in unsymmetrischer Form aufgestellt.

Die Lamé'schen Producte des Coordinatensystems M) (Cylinder zweiten Grades) sind zuerst nicht für das Potentialproblem, sondern für das Problem schwingender Membranen von Mathieu (1868) aufgestellt. Für das Coordinatensystem Q) (parabolische Cylinder) ist von H. Weber (1868) ein Problem gelöst, welches im Wesentlichen mit der Aufstellung Lamé'scher Producte übereinstimmt.

Schon im Jahre 1870 behauptete Mehler, ohne die Rechnungen mitzutheilen, dass beim Coordinatensystem P) (Rotationsparaboloide) Bessel'sche Functionen auftreten würden. Die wirkliche Aufstellung der Lamé'schen Producte ist aber erst von C. Bär (1881) geschehen.

Im Jahre 1875 stellte Wangerin die Lamé'schen Producte für die Coordinatensysteme C), D), F) (Rotationscycliden) und im nächsten Jahre für die Coordinatensysteme A) und B) (allgemeine Cycliden) auf. Auch die unsymmetrischen Formen dieser letzten Coordinatensysteme wurden dann in demselben Jahre von Darboux behandelt.

Hiermit haben wir von allen unseren siebzehn Coordinatensystemen Rechenschaft gegeben mit Ausnahme des Falles O) (allgemeine Paraboloide). Die Lamé'schen Producte dieses Falles scheinen zuerst 1888 gleichzeitig von Greenhill und C. Bär aufgestellt worden zu sein. Das Coordinatensystem ist aber schon (1874) in einer posthumen Abhandlung Lamé's als isothermisches Coordinatensystem ausführlich untersucht worden.

Allen diesen Einzelarbeiten gegenüber hat die hier gegebene Darstellung den Vorzug der einheitlichen Ableitung aus einem obersten Princip.

Schliesslich wollen wir noch einige Punkte besprechen, in welchen die gewöhnliche Theorie von der von uns entwickelten Theorie abzuweichen scheint.

Zunächst bemerken wir, dass in den meisten einfachen Fällen der Factor T, mit welchem unsere Lamé'schen Producte zu multipliciren waren (vergl. S. 147), in der gewöhnlichen Theorie nicht vorkommt.

Dies ist für die Kategorien II und III sehr einfach zu erklären. In der gewöhnlichen Theorie wird nämlich nicht nur die gemeinsame Singularität (Doppelpunkt, biplanarer Punkt etc.) aller Flächen der Schaar ins Unendliche geworfen, wodurch die Cycliden zu Flächen zweiten Grades werden, sondern auch der Punkt e_1, welcher zum mehrfachen Elementartheiler des Schemas gehört, wird ins Unendliche geworfen. Es entspricht also dem Parameterwerthe $\lambda = \infty$ eine Fläche, welche auf den unendlich fernen Raumpunkt zusammengeschrumpft ist. Diese Fläche ist dann, wie leicht zu sehen, die doppeltgezählte unendlich ferne Punktkugel. Nun enthielt aber der Factor T im Zähler die $\frac{1}{2}$-te Potenz der linken Seite der Gleichung der unendlich fernen Punktkugel, im Nenner aber die $\frac{1}{4}$-te Potenz der linken Seite der Cyclidengleichung $\lambda = \infty$. Hiernach reducirt sich unter den oben genannten besonderen Voraussetzungen der Factor T auf eine blosse Constante, und kann deshalb ganz weggelassen werden.

Wenn wir genau zusehen, finden wir, dass die Fälle, in welchen die Potentialgleichung durch Lamé'sche Producte ohne Hinzufügung eines Factors zu befriedigen ist, diejenigen sind, in denen das Coordinatensystem aus Flächen ersten oder zweiten Grades besteht, nur dürfen diese Flächen nicht sämmtlich Kugeln, wohl aber sämmtlich Ebenen sein.

Diese Thatsache ist in der grossen Mehrzahl der Fälle durch die oben angestellten Betrachtungen erklärt. Es giebt aber auch in der Kategorie I zwei Flächenschaaren I'b$_3$) und I'd$_2$), welche vom zweiten Grade sein können. Hierüber müssen wir noch ein Paar Worte sagen. Denn auch in einer anderen Beziehung sind diese zwei Fälle beachtenswerth, indem derjenige Factor des Lamé'schen Productes, welcher sich bei ihnen auf den ergänzenden Büschel concentrischer Kugeln bezieht, bei uns die Form hat:

$$Lr^{\sqrt{c}} + Mr^{-\sqrt{c}},$$

in der gewöhnlichen Theorie aber die Form:

$$Lr^n + Mr^{-n-1}.$$

Dieses Alles erklärt sich nun dadurch, dass, wenn wir $e_1 = \infty$ setzen, der Factor T sich auf $r^{-\frac{1}{2}}$ reducirt*).

*) Hiernach erscheint die Function $Lr^n + Mr^{-n-1}$ nicht als Specialfall einer Lamé'schen Function. Es ist aber keineswegs ausgeschlossen, dass sie so erscheinen könnte, wenn wir zu diesen Coordinatensystemen durch andere Grenz-

Natürlich sind noch in der gewöhnlichen Darstellung ausser dem Punkte e_1 die anderen Punkte e_i auf specielle Weise festgelegt, so z. B. im Falle I′d$_2$) $e_1 = \infty$, $e_3 = 0$, $e_4 = 1$ *). Hierauf gehen wir aber, der Kürze halber, nicht näher ein. Nur über den Fall II a) wollen wir noch Einiges erwähnen.

Nachdem wir in diesem Falle $e_1 = \infty$ gesetzt haben, wird das Integral t einfach zum elliptischen Integrale:

$$t = \int \frac{d\lambda}{2\sqrt{(\lambda - e_3)(\lambda - e_4)(\lambda - e_5)}}.$$

Es liegt also nahe die Punkte e_3, e_4, e_5 so festzulegen, dass $e_3 + e_4 + e_5 = 0$, wodurch t geradezu auf die Weierstrassische Normalform gebracht wird. Wenn nun dies unter Umständen beim Studium des Falles II a) selber bequem sein kann, so müssen wir doch bemerken, dass wir hierdurch gewisse Grenzübergänge zu weiter ausgearteten Fällen, namentlich zum Falle II d), unmöglich machen**).

Kapitel 3.

Ueber ausgeartete Cyclidensechsflache und die zugehörigen Randwerthaufgaben.

§ 1. Geometrisches über die Ausartungen des allgemeinen Cyclidensechsflachs.

Im zweiten Abschnitte dieses Buches haben wir den allgemeinen Körper betrachtet, welcher von sechs confocalen Cycliden begrenzt ist.

übergänge gekommen wären; und in der That ist dies der Fall, wenn wir vom Kugelbüschel II c) ausgehen, wie man thun muss, wenn man, wie es meistens geschieht, das System II a) als allgemeinstes System ansieht.

*) Hinterher wendet man wiederum die früher erwähnte quadratische Transformation an. Vergl. S. 113.

**) Diese Unmöglichkeit hat Herr Häntzschel bemerkt (Dissertation, Berlin 1883, weiter ausgeführt in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 31); aber da er sich nicht entschliessen konnte von der Weierstrassischen Normalform der elliptischen Integrale abzuweichen, kam er zu dem Schlusse, dass die Functionen der zweiaxigen Cylinder kein Specialfall der Functionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades sein könnten, und dass folglich alle früheren Mathematiker, namentlich Heine, sich in diesem Punkte geirrt hätten! Neuerdings scheint Häntzschel diese Ansicht aufgegeben zu haben. Vergl. dessen Buch: Ueber die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. S. 68.

Wir hatten damals insbesondere zwei solche allgemeine Cyclidensechsflache zu unterscheiden, welche bezw. zum Falle I′a) und I″a) gehörten. In diesem Paragraphen wollen wir nun die verschiedenen Ausartungen, bezw. Modificationen dieser Körper kurz zur Sprache bringen, mit welchen wir uns späterhin beschäftigen müssen.

Zunächst werden wir, den fünfzehn ausgearteten Orthogonalsystemen der Tabelle von Seite 102—104 entsprechend, fünfzehn wesentlich verschiedene ausgeartete Sechsflache bekommen. Auf diese Sechsflache kommen wir zum Schluss dieses Paragraphen zurück.

Aber auch bei den allgemeinen Orthogonalsystemen I′a) und I″a) können wir unsere Körper ausarten lassen. Wir haben schon früher darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn wir unser Cyclidensechsflach in eine Richtung hin sich verlängern lassen, während seine anderen Dimensionen fest bleiben, die zwei den Körper in dieser Richung begrenzenden Seitenflächen schliesslich zusammenfallen werden, während der Körper selber sich zwischen ihnen in ringförmiger Gestalt erstreckt. Dies geschieht, wenn das entsprechende Segment sein Intervall genau vier Mal überdeckt. Dies ist an sich noch nicht als eine Ausartung des Körpers anzusehen. Wir wollen aber jetzt eine wesentliche Modification eintreten lassen, indem wir die zwei zusammenfallenden Seitenflächen einfach wegnehmen. *Hierdurch bekommen wir ein ringartiges Cyclidenvierflach.* Diese Modification werden wir dann dadurch schematisch andeuten, dass wir die zwei Endpunkte des Segmentes mit einander verschmelzen und dadurch ein geschlossenes Segment bekommen, welches sein Intervall zweimal umspannt.

Will man ferner Körper in Betracht ziehen, welche den Raum mehrfach erfüllen, so kann man auch Segmente benutzen, welche nach $2k$-maliger Umspannung ihres Intervalles in sich selbst zurücklaufen. Hierdurch bekommt man Cyclidenvierflache, welche wiederum eine ringförmige Gestalt haben, wobei man aber den Ring k-mal umlaufen muss, um nach dem ursprünglichen Körperpunkte zurückzukommen*).

Nun liegt uns nichts im Wege, dass wir den besprochenen Process gleichzeitig auf zwei der drei Segmente anwenden, wodurch wir Körper bekommen werden, welche durch ein gewöhnliches und zwei geschlossene Segmente repräsentirt werden; die geschlossenen Segmente mögen ihre Intervalle $2k$- bezw. $2l$-mal umspannen. Zunächst ist nach dem oben Gesagten ohne Weiteres klar, dass, falls nicht $k = l = 1$,

*) Dagegen würde ein geschlossenes Segment, welches sein Intervall eine ungerade Anzahl von Malen umspannt, nicht zur Charakterisirung eines Körpers brauchbar sein.

der Körper den Raum mehrfach erfüllen wird. Aber auch wenn $k = l = 1$, kann, wie wir jetzt sehen werden, derselbe Umstand eintreten.

Wir haben es im vorliegenden Falle mit Cyclidenzweiflachen zu thun und wollen zunächst beweisen, dass *jede der begrenzenden Cyclidenflächen eine dreifach zusammenhängende sein muss.* Den Beweis führen wir dadurch, dass wir zeigen, dass, von einem beliebigen Punkte der Fläche ausgehend, man drei Wege auf der Fläche beschreiben kann, welche zum ursprünglichen Punkte zurückführen, und welche nicht durch stetige Aenderung in einander übergeführt werden können; dass dann einer von diesen Wegen sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt, während jeder andere Weg, welcher nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, durch stetige Aenderung in eine Wiederholung und Zusammensetzung der übrigen zwei Wege umgeformt werden kann. Wir sehen dies sofort durch Betrachtung des Schemas. In der That wird der Raumpunkt einen geschlossenen Weg beschreiben wenn die drei Punkte μ, ν, ϱ, von ihren Anfangslagen ausgehend, sich bewegen und schliesslich jeder zu seiner Anfangslage in dem das Intervall mehrfach überdeckenden Segmente zurückkehrt. Soll insbesondere der Weg auf der einen Begrenzungsfläche des Zweiflachs liegen, so müssen wir denjenigen der drei Punkte μ, ν, ϱ festhalten, welcher in dem gewöhnlichen Segmente liegt, und zwar in dem einen oder dem anderen der Endpunkte dieses Segmentes. Die zwei anderen Punkte, sagen wir μ, ν, bewegen sich dann in geschlossenen Segmenten. Nun betrachten wir zunächst folgende drei Fälle:

1) Die Punkte μ und ν umlaufen ihre Segmente bezw. 0 und 0-mal,
2) „ „ „ „ „ „ „ „ „ 0 „ 1 „ ,
3) „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1 „ 0 „ .

Die drei entsprechenden Wege des Raumpunktes können offenbar nicht durch stetige Aenderung in einander übergeführt werden. Dagegen kann die Bewegung der Punkte μ und ν im ersten Falle, des Punktes μ im zweiten, und des Punktes ν im dritten durch stetige Aenderung ganz aufgehoben werden. Hiernach sieht man erstens, dass der Weg des Raumpunktes im ersten Falle sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt, und zweitens, dass jeder andere Weg des Raumpunktes, welcher einem m-maligen Umlaufen des Segmentes μ und einem n-maligen Umlaufen des Segmentes ν entspricht, durch stetige Aenderung auf eine n-malige Beschreibung des zweiten und eine m-malige Beschreibung des dritten Weges zurückgeführt werden kann. Hierdurch haben wir den versprochenen Beweis erbracht.

Nun wissen wir aber, dass die Seitenflächen unseres Cycliden-

zweiflachs entweder a) eintheilige Cycliden sind, oder b) Hälften von zweitheiligen Cycliden, oder c) Ringcycliden.

Es sind aber die Flächen, welche in den zwei ersten Fällen vorkommen, als schlichte Flächen betrachtet einfach zusammenhängende. Wir haben aber gesehen, dass unsere Begrenzungsflächen dreifach zusammenhängend sind, und dies kann also in den Fällen a) und b) nur dadurch der Fall sein, dass sie die betreffenden schlichten Flächen zweifach überdecken *). In diesen beiden Fällen wird also der Körper den Raum mehrfach erfüllen. Wir bekommen also folgendes Resultat:

In den allgemeinen Fällen $I'a$), $I''a$) ist das nebenstehende das einzige Schema mit zwei geschlossenen Segmenten, welches einen Körper darstellt, der keinen Theil des Raumes mehrfach erfüllt.

Der durch dieses Schema dargestellte Körper ist, wie man sofort sieht, der Zwischenraum zwischen zwei Ringcycliden, von denen die eine die andere umschliesst.

Wollten wir schliesslich alle drei Segmente durch geschlossene Segmente ersetzen, so würde unser Körper gar keine Begrenzung mehr haben und folglich den ganzen Raum erfüllen. Man zeigt aber leicht, dass der Körper den ganzen Raum mehrfach erfüllen wird, indem man, auf ähnlichem Wege wie soeben, beweist dass der Körper vierfach zusammenhängend ist.

Kehren wir jetzt noch einmal zu den Cyclidenzweiflachen zurück, so drängt sich die Frage auf: Wie können wir unsere Schemata modificiren, damit sie Körper darstellen, welche von zwei einfach zusammenhängenden Cyclidenflächen begrenzt sind, aber den Raum nur einfach erfüllen?

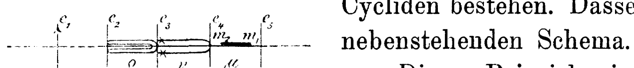
Betrachten wir, um die Ideen zu fixiren, ein Cyclidenvierflach, welches durch zwei zweitheilige Cycliden und zwei Ringcycliden begrenzt ist und etwa das nebenstehende Schema besitzt**). Lassen wir jetzt das Segment $n_1 n_2$ sich bis zum Punkte e_3 hin verlängern, so wird sich die Seitenfläche $\nu = n_2$ unseres Körpers auf sich selbst zusammengefaltet haben und folglich, sofern wir den

*) Wir haben es hier, wie leicht zu sehen ist, mit der gewöhnlichen zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit vier Verzweigungspunkten zu thun, welche bekanntlich eine dreifach zusammenhängende ist.

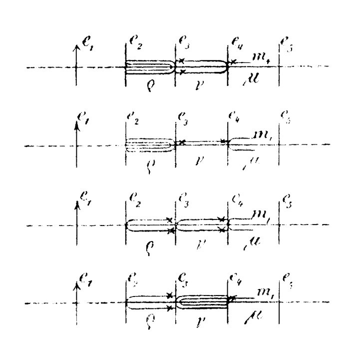
**) Um die folgenden Entwickelungen zu verstehen muss man sich das Orthogonalsystem möglichst lebhaft vorstellen (vergl. S. 76—78) und genau zusehen, welche Flächenschaaren den verschiedenen Intervallen entsprechen. Dann kann man sich ohne grosse Mühe den Körper construiren, der zu einem vorgelegten Schema gehört, indem man jedesmal von einem kleinen würfelförmigen Körper ausgeht, dessen Dimensionen man dann in geeigneter Weise wachsen lässt.

schlichten Raum betrachten, nicht mehr eine eigentliche Begrenzung des Körpers bilden, sondern nur noch einen Querschnitt in demselben. Diese Seitenfläche kann also ganz weggenommen werden, ohne dass der Körper aufhört völlig begrenzt zu sein. Dies wollen wir durch ein Kreuz im betreffenden Segmentenendpunkte andeuten. Das hierdurch erhaltene Cyclidendreiflach wird dann durch das nebenstehende Schema dargestellt.

Wollen wir schliesslich dieses Cyclidendreiflach zu einem Cyclidenzweiflach machen, so lassen wir das Segment $e_3 n_1$ sein Intervall genau zweimal überdecken, so dass auch sein Endpunkt n_1 in e_3 hineinfällt. Hierdurch haben wir dann bewirkt, dass die Seitenfläche n_1 überhaupt nicht mehr eine eigentliche Begrenzung, sondern nur noch ein Querschnitt im Körper ist. Dieselbe kann folglich weggenommen werden und wir bekommen ein Cyclidenzweiflach, welches den Raum nur einfach erfüllt und dessen Seitenflächen aus je einer Hälfte zweier zweitheiliger Cycliden bestehen. Dasselbe entspricht dem nebenstehenden Schema.



Dieses Beispiel wird genügen, um zu zeigen, auf welcher Weise man Cyclidendrei-, -zwei- und sogar -einflache bekommen kann. Zwei Punkte mögen noch besonders besprochen werden.

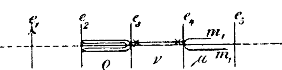


Zunächst ist kein Grund vorhanden, warum ein und derselbe Körper nicht auf mehrere verschiedene Weisen als Ausartung eines allgemeinen Cyclidensechsflachs angesehen werden könnte; und in der That ist dies auch häufig der Fall. So z. B. stellen nebenstehende vier Schemata einen und denselben Körper dar, nämlich das Cyclideneinflach, welches von einer Schale der zweitheiligen Cyclide $\mu = m_1$ begrenzt ist*).

Zweitens bemerken wir, dass eine Seitenfläche unseres Körpers so auf sich selbst zusammengefaltet sein kann, dass ein Theil derselben nicht mehr als eigentliche Begrenzung des Körpers dient und

*) Diese Fläche theilt den Raum in zwei Cyclideneinflache, welche natürlich in der Geometrie der reciproken Radien nicht als „Inneres“ und „Aeusseres“ unterschieden werden können. Dieselben sind vielmehr dadurch zu charakterisiren, dass nur das eine derselben eine Symmetriekugel in seinem Inneren enthält. Das andere, welches diese Kugel nicht enthält, wird durch die obenstehenden Schemata dargestellt.

folglich weggenommen werden kann, während der übrige Theil noch eine wirkliche Begrenzung bildet. Dies tritt z. B. ein bei dem Körper, welcher durch nebenstehendes Schema dargestellt wird für die Seitenfläche $\nu = e_4$. *Indessen werden wir eine Seitenfläche niemals blos zum Theil wegnehmen*, da unsere Methoden uns nicht gestatten werden, die Randwerthaufgabe für solche Körper zu lösen. Hieran knüpfen wir noch die Bemerkung, dass der Endpunkt eines Segmentes nur dann gekreuzt werden kann, wenn a) dieser Endpunkt in einem singulären Punkte liegt und b) das andere Intervall, welches an diesen singulären Punkt grenzt, ein Segment enthält, welches sich in dem betreffenden singulären Punkte umbiegt, und c) die zwei Theile dieses Segmentes sich gleich weit von dem singulären Punkte aus erstrecken, wobei der Fall eines geschlossenen Segmentes mit eingeschlossen sein soll.



Fassen wir jetzt noch die ausgearteten Orthogonalsysteme ins Auge, so bekommen wir zunächst den fünfzehn Fällen C)—Q) entsprechend fünfzehn verschiedene ausgeartete Cyclidensechsflache. Dieselben werden, falls alle ihre Dimensionen genügend klein sind, ungefähr die Gestalt geradliniger rechtwinkliger Parallelepepida haben. Von dieser einfachen Gestalt ausgehend, können wir den Körper sich nach einer oder mehreren Richtungen hin verlängern lassen. Diesen Process können wir dann jedenfalls so weit führen, bis eins der drei Segmente μ, ν, ϱ bezw. μ', ν', ϱ' mit seinem Endpunkte an einen zwei- oder mehrfachen Punkt des Schemas heranreicht. Tritt dieser Fall ein, so wird die entsprechende Seitenfläche auf einen Punkt oder, im Falle eines Doppelpunktes (11), auf einen Kreisbogen zusammengeschrumpft sein. *In beiden Fällen ist jede weitere Ausdehnung des Körpers nach dieser Richtung hin unmöglich.*

Schrumpft nun eine Seitenfläche auf eine Linie oder einen Punkt zusammen, so wird es nicht nöthig sein dieselbe noch ausdrücklich wegzunehmen, denn wenn wir uns auch nicht auf den schlichten Raum beschränken, wird sie keine Begrenzung des Körpers bilden. Diese letzte Bemerkung gilt gleichwohl ob die betreffende Linie oder der betreffende Punkt als Kante oder Ecke des Körpers erscheint oder mitten im Körper liegt.

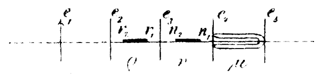
Jedesmal also, wenn eins der drei Segmente an einen mehrfachen Punkt heranreicht, wird die Anzahl von Seitenflächen um eins vermindert. Indem wir nun mit dieser Ausartungsweise die zwei anderen verbinden, welche wir bei den allgemeinen Cyclidenschaaren hatten, so werden wir offenbar eine sehr grosse Anzahl von ausgearteten

Körpern bekommen, welche jede beliebige Anzahl von Seitenflächen kleiner als sechs haben können.

Wir machen schliesslich auf die grosse Anzahl der Arten*) aufaufmerksam, auf welche das Innere einer Vollkugel als Ausartung eines Cyclidensechsflachs erscheinen kann. In der That können wir hierzu jede eintheilige Symmetriekugel eines beliebigen Systems allgemeiner oder ausgearteter Cycliden und nicht, wie bislang wohl ausschliesslich geschehen ist, nur diejenigen Kugeln, welche zu einem Kugelbüschel mit nulltheiligem oder Punktgrundkreis gehören, gebrauchen.

§ 2. Ueber die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für allgemeine Cyclidenvielflache, welche weniger wie sechs Seitenflächen haben.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen mit Körpern beschäftigen, welche von weniger wie sechs allgemeinen Cycliden (I′a) oder I″a)) begrenzt sind.



Fassen wir zunächst den Fall eines Cyclidenvierflachs ins Auge, welches durch zwei gewöhnliche Segmente $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ und ein geschlossenes Segment μ definirt ist. Hier werden wir offenbar die Randwerthaufgabe nicht in sechs, sondern nur noch in vier Einzelprobleme spalten. Wir wollen hier nur dasjenige Einzelproblem betrachten, in welchem das Potential auf der Seitenfläche $\varrho = r_2$ beliebig vorgeschrieben wird oder wie wir kurz sagen wollen, in welchem $\varrho = r_2$ die ausgezeichnete Seitenfläche ist, denn die anderen drei Probleme würden sich von diesem nicht wesentlich unterscheiden.

Nun haben wir zunächst diejenigen Lamé'schen Producte aufzusuchen, welche zum Körper gehören und auf den drei Seitenflächen $\nu = n_1$, $\nu = n_2$, $\varrho = r_1$ verschwinden. Schreiben wir das Lamé'sche Product $E'(\mu) \cdot E''(\nu) \cdot E'''(\varrho)$, so sehen wir, dass, damit das Product innerhalb des Körpers eindeutig und stetig sein soll, die Function $E'(\mu)$ nach zweimaliger Umlaufung ihres Intervalles μ in sich selbst zurücklaufen muss. Wir bestimmen also die accessorischen Parameter dadurch, dass wir nach Vorschrift von Seite 184 das Oscillationstheorem auf das geschlossene Segment μ und das gewöhnliche Segment $n_1 n_2$ anwenden. Verlangen wir nun $2m$ Halboscillationen im geschlossenen Segmente μ und n Halboscillationen im Segmente $n_1 n_2$, so werden wir zwei verschiedene Lamé'sche Producte bekommen, je nachdem wir verlangen, dass die Curve $y = E'(\mu)$ zu der ersten oder

*) Ich habe mehr wie dreissig wesentlich verschiedene aufgezählt.

der zweiten Reihe von Figuren auf Seite 184 gehört. Diese zwei Producte wollen wir folgendermassen bezeichnen:

$$E'_{2m^{(1)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(1)},\,n}(\nu)\cdot E'''_{2m^{(1)},\,n}(\varrho);\quad E'_{2m^{(2)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(2)},\,n}(\nu)\cdot E'''_{2m^{(2)},\,n}(\varrho).$$

Bilden wir nun folgende Reihe:

$$\psi=\sum_1^\infty{}^m\sum_1^\infty{}^n A_{2m^{(1)},\,n}\cdot E'_{2m^{(1)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(1)},\,n}(\nu)\cdot E'''_{2m^{(1)},\,n}(\varrho)$$
$$+\sum_0^\infty{}^m\sum_1^\infty{}^n A_{2m^{(2)},\,n}\cdot E'_{2m^{(2)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(2)},\,n}(\nu)\cdot E'''_{2m^{(2)},\,n}(\varrho),$$

und führen wir ferner folgende Bezeichnung ein:

$$B_{2m^{(1)},\,n}=A_{2m^{(1)},\,n}\cdot E'''_{2m^{(1)},\,n}(r_2);\quad B_{2m^{(2)},\,n}=A_{2m^{(2)},\,n}\cdot E'''_{2m^{(2)},\,n}(r_2),$$

so wird die obenstehende Reihe die gesuchte ψ-Function sein, wenn wir die B so bestimmen können, dass folgende Reihenentwickelung gilt:

$$f(\mu,\,\nu)=\sum_1^\infty{}^m\sum_1^\infty{}^n B_{2m^{(1)},\,n}\cdot E'_{2m^{(1)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(1)},\,n}(\nu)$$
$$+\sum_0^\infty{}^m\sum_1^\infty{}^n B_{2m^{(2)},\,n}\cdot E'_{2m^{(2)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(2)},\,n}(\nu).$$

Den Coefficienten $B_{2m^{(i)},\,n}$ bestimmt man gerade wie auf Seite 155, indem man die Reihe mit $(\mu-\nu)E'_{2m^{(i)},\,n}(\mu)E''_{2m^{(i)},\,n}(\nu)\cdot du\cdot dv$ multiplicirt und über die beiden Segmente integrirt. Wendet man nämlich die Betrachtungen von Seite 155 an, so sieht man sofort, dass hierbei sämmtliche Glieder der Reihe wegfallen mit Ausnahme desjenigen mit dem Coefficienten $B_{2m^{(i)},\,n}$. Sonach bekommt man:

$$B_{2m^{(i)},\,n}=\frac{\iint(\mu-\nu)f(\mu,\nu)\cdot E'_{2m^{(i)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(i)},\,n}(\nu)\cdot du\,dv}{\iint(\mu-\nu)[E'_{2m^{(i)},\,n}(\mu)\cdot E''_{2m^{(i)},\,n}(\nu)]^2\cdot du\,dv},$$

wo die Integration über beide Segmente zu erstrecken ist. Das hier im Nenner stehende Integral kann man noch ferner vereinfachen, indem man bemerkt, dass der Integrand dieselben Werthe in den vier übereinanderliegenden Theilen des geschlossenen Segmentes annimmt. Hiernach wird derselbe gleich sein vier Mal dem Doppelintegral, welches über das gewöhnliche Segment n_1n_2 und das einfach überdeckte Intervall e_4e_5 zu erstrecken ist.

Auf die Lösung der Randwerthaufgabe bei Cyclidenzweiflachen, welche durch zwei geschlossene Segmente und ein gewöhnlicher Seg-

ment dargestellt werden, gehen wir nicht näher ein, indem die Modification des allgemeinen Ansatzes eine ganz ähnliche sein würde, wie beim soeben besprochenen Cyclidenvierflach.

Etwas anders verhält es sich bei Cyclidenmehrflachen, welche durch Segmente dargestellt werden, deren Endpunkte zum Theil mit Kreuzen versehen sind. In der That deuten diese Kreuze geradezu an, dass die zum Körper gehörigen Lamé'schen Producte auf den entsprechenden Flächen nicht nothwendig verschwinden, sondern blos, dass beim Uebergange über dieselben diese Producte nebst ihren ersten Ableitungen sich stetig ändern. Es fragt sich also: *wie haben wir die betreffende Lamé'sche Function im gekreuzten Endpunkte zu wählen, damit diese Continuität stattfindet?*

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass solche gekreuzte Segmentenendpunkte nur in Intervallenendpunkten liegen können, und auch nur dann vorkommen können, wenn im angrenzenden Intervall das Segment entweder ein geschlossenes ist oder doch sich im betreffenden Punkte umbiegt und sich mit seinen zwei Theilen gleichweit davon erstreckt.

Um die Ideen zu fixiren, wollen wir die Cyclidenvielflache betrachten, welche durch die nebenstehenden Schemata charakterisirt werden.

Bezeichnen wir nun mit $E'(\mu)^+$ und $E'(\mu)^-$ die Werthe einer Lamé'schen Function für Werthe von μ, welche einander gleich sind, aber auf verschiedenen Theilen des Segmentes liegen, die aber in e_4 in einander übergehen. Damit wir nun nicht nur im Lamé'schen Producte selber, sondern auch in seinen ersten Differentialquotienten beim Ueberschreiten der Seitenfläche $\nu = e_4$ Continuität haben, müssen offenbar folgende zwei Gleichungen stattfinden:

$$E'(\mu)^+ \cdot E''(e_4) \cdot E'''(\varrho) = E'(\mu)^- \cdot E''(c_4) \cdot E'''(\varrho),$$

$$E'(\mu)^+ \left(\frac{dE''(\nu)}{d\nu}\right)_{\nu=e_4} \cdot E'''(\varrho) = -E'(\mu)^- \cdot \left(\frac{dE''(\nu)}{d\nu}\right)_{\nu=e_4} \cdot E'''(\varrho).$$

Soll nun die erste dieser Gleichungen stattfinden, so müssen wir entweder haben $E'(\mu)^+ = E'(\mu)^-$ oder aber $E''(e_4) = 0$. Soll andererseits die zweite Gleichung stattfinden, so müssen wir haben entweder $E'(\mu)^+ = -E'(\mu)^-$ oder aber $\left(\frac{dE''(\nu)}{d\nu}\right)_{\nu=e_4} = 0$. Damit also beide Gleichungen zugleich stattfinden sollen, müssen folgende Relationen bestehen:

$$\text{entweder} \begin{cases} E'(\mu)^{+} = E'(\mu)^{-} \\ \left(\frac{dE''(\nu)}{d\nu}\right)_{\nu = e_4} = 0 \end{cases} \text{oder} \begin{cases} E'(\mu)^{+} = -E'(\mu)^{-} \\ E''(e_4) = 0 \end{cases}.$$

Die Gleichung $E'(\mu)^{+} = E'(\mu)^{-}$ wird aber offenbar dann und nur dann für alle Werthe von μ befriedigt, wenn die Function $E'(\mu)$ derjenige zum Punkte e_4 gehörige Fundamentalzweig ist, welcher den Exponenten 0 besitzt. Die Gleichung $\left(\frac{dE''(\nu)}{d\nu}\right)_{\nu=e_4} = 0$ sagt aber auch aus, dass $E''(\nu)$ in e_4 ein Fundamentalzweig ist und dort zum Exponenten 0 gehört. In ähnlicher Weise besagt uns das zweite der oben geschriebenen Gleichungspaare, dass sowohl $E'(\mu)$ als auch $E''(\nu)$ im Punkte e_4 zum Exponenten $\frac{1}{2}$ gehören. Zusammenfassend bekommen wir also folgenden wichtigen Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Lamé'sche Product $E'(\mu) \cdot E''(\nu) \cdot E'''(\varrho)$ beim Ueberschreiten der Fläche $\nu = e_4$ neben seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig verläuft, besteht darin, dass im Punkte e_4 die Functionen $E'(\mu)$ und $E''(\nu)$ beide Fundamentalzweige sind, welche zum selben Exponenten gehören.

Fassen wir jetzt noch das Cyclidendreiflach genauer ins Auge, welches durch das erste der obenstehenden Schemata charakterisirt wird. Hier haben wir die allgemeine Randwerthaufgabe in drei Einzelprobleme zu spalten. In allen drei derselben werden wir, um Continuität und Eindeutigkeit beim Umlaufen des Segmentes μ zu bekommen, den Factor $E'(\mu)$ als Fundamentalzweig im Punkte e_4 wählen. Um dann noch dem gekreuzten Endpunkte e_4 des Segmentes ν Genüge zu leisten, haben wir nur noch den Factor $E''(\nu)$ so zu wählen, dass er im Punkte e_4 zu demselben Exponenten gehört; nicht wie wir es sonst gethan hätten, stets zum Exponenten $\frac{1}{2}$. Dies macht aber keine weitere Aenderung unserer früheren Lösungsmethode nöthig. Denn in dem Einzelprobleme, bei dem das Potential auf der Seitenfläche $\nu = n_2$ beliebig vorgeschrieben ist, haben wir das Oscillationstheorem nur in gewöhnlicher Weise auf das Segment $r_1 r_2$ und das geschlossene Segment μ anzuwenden. In den zwei anderen Einzelproblemen aber wenden wir das Oscillationstheorem auf das Segment $e_4 n_2$ und das geschlossene Segment μ an. Dieses können wir (vergl. S. 162) gerade so gut thun, wenn in dem Endpunkte e_4 die Grenzbedingung $\frac{dE}{d\nu} = 0$ stattfinden soll, als wenn man die einfachere Grenzbedingung $E = 0$ hat.

Wir wenden uns jetzt zum Körper, welcher durch das zweite der obenstehenden Schemata definirt ist. Derselbe erscheint im Schema als Cyclidenfünfflach, ist aber wirklich ein Cyclidenvierflach, da die zwei Flächen $\mu = m_1$, $\mu = m_2$, nachdem die Seitenfläche $\nu = e_4$ weggenommen worden ist, nur noch eine einzige Begrenzungsfläche bilden. Dementsprechend müssen wir eine Modification in der Behandlungsweise unseres Problems eintreten lassen.

Zunächst zerlegen wir dasselbe in vier Einzelprobleme, von denen drei, nämlich diejenigen, in welchen $\varrho = r_1$, $\varrho = r_2$ oder $\nu = n_2$ die ausgezeichnete Seitenfläche ist, keiner Modification unserer Methode bedürfen. In der That haben wir in diesen drei Problemen jedesmal auf das Segment $m_1 m_2$ das gewöhnliche Oscillationstheorem anzuwenden. Dieses kommt aber darauf hinaus, dass wir auf die Hälfte $m_1 e_4$ des Segmentes das Oscillationstheorem anwenden und in m_1 die Grenzbedingung $E = 0$, in e_4 aber nach einander beide Grenzbedingungen $E = 0$ und $\frac{dE}{dv} = 0$ vorschreiben*). Hiernach ist der Factor $E'(\mu)$ stets als Fundamentalzweig im Punkte e_4 bestimmt, und die weitere Lösung des Problems unterscheidet sich in keiner Weise von der Lösung des eben besprochenen Problems, in welchem das Segment μ ein geschlossenes ist.

Es bleibt aber noch das Problem zu behandeln, bei welchem die Werthe des Potentials auf derjenigen Seitenfläche beliebig vorgeschrieben werden, welche aus den Flächen $\mu = m_1$ und $\mu = m_2$ besteht. Zunächst ist es klar, dass man dieses Problem nicht dadurch behandeln kann, dass man es in zwei Einzelprobleme spaltet, in denen das Potential nur auf der einen Hälfte $\mu = m_1$ oder $\mu = m_2$ der Seitenfläche beliebig vorgeschrieben wird, auf der anderen aber verschwindet. In der That muss, wie wir schon gesehen haben, der Factor $E'(\mu)$ im Punkte e_4 ein Fundamentalzweig sein; verschwindet er also in einem der Punkte m_1, m_2, so wird er es auch in dem anderen thun, was doch nicht der Fall sein soll. Wir müssen vielmehr hier eine ganz andere Methode in Anwendung bringen.

Wir haben das Oscillationstheorem auf die zwei Segmente $r_1 r_2$ und $e_4 n_2$ anzuwenden und bekommen hierdurch zwei Arten Lamé'scher Producte, je nachdem im Punkte e_4 die Grenzbedingung $E = 0$ oder $\frac{dE}{dv} = 0$ in Anwendung gebracht wird. Bilden wir eine Reihe aus den Lamé'schen Producten erster Art, so bekommen wir eine ψ-Func-

*) Dies sieht man durch genau dieselbe Ueberlegung wie wir Seite 179 unter ähnlichen Umständen gebraucht haben.

tion, welche im Punkte (m_1, ν, ϱ) das entgegengesetzte Vorzeichen, aber sonst denselben Werth hat wie im Punkte (m_2, ν, ϱ). Dagegen wird jede Reihe aus Lamé'schen Producten zweiter Art eine ψ-Function sein, welche in den Punkten (m_1, ν, ϱ), (m_2, ν, ϱ) dieselben Werthe und Vorzeichen hat. Hierdurch wird der Weg angedeutet, den wir einzuschlagen haben. Bezeichnen wir nämlich durch $f^+(\nu, \varrho)$ bezw. $f^-(\nu, \varrho)$ die auf der Seitenfläche $\mu = m_1$ bezw. $\mu = m_2$ beliebig vorgeschriebenen Werthe der ψ-Function und setzen dann:

$$\varphi^+(\nu, \varrho) = \frac{f^+(\nu, \varrho) - f^-(\nu, \varrho)}{2}, \quad \chi^+(\nu, \varrho) = \frac{f^+(\nu, \varrho) + f^-(\nu, \varrho)}{2},$$

$$\varphi^-(\nu, \varrho) = \frac{f^-(\nu, \varrho) - f^+(\nu, \varrho)}{2}, \quad \chi^-(\nu, \varrho) = \frac{f^-(\nu, \varrho) + f^+(\nu, \varrho)}{2},$$

so werden wir haben:

$$f^+(\nu, \varrho) = \varphi^+(\nu, \varrho) + \chi^+(\nu, \varrho) \text{ und } f^-(\nu, \varrho) = \varphi^-(\nu, \varrho) + \chi^-(\nu, \varrho).$$

Können wir also folgende zwei Einzelprobleme behandeln, so werden wir durch Addition der Lösungen die gewünschte Lösung bekommen. Die Einzelprobleme sind die folgenden:

1) Es wird verlangt eine ψ-Function zu bestimmen, welche auf den Seitenflächen $\varrho = r_1$, $\varrho = r_2$, $\nu = n_2$ verschwindet und auf den Seitenflächen $\mu = m_1$, $\mu = m_2$ die Werthe $\varphi^+(\nu, \varrho)$, $\varphi^-(\nu, \varrho)$ annimmt.

2) Es wird verlangt eine ψ-Function zu bestimmen, welche auf den Seitenflächen $\varrho = r_1$, $\varrho = r_2$, $\nu = n_2$ verschwindet und auf den Seitenflächen $\mu = m_1$, $\mu = m_2$ die Werthe $\chi^+(\nu, \varrho)$, $\chi^-(\nu, \varrho)$ annimmt.

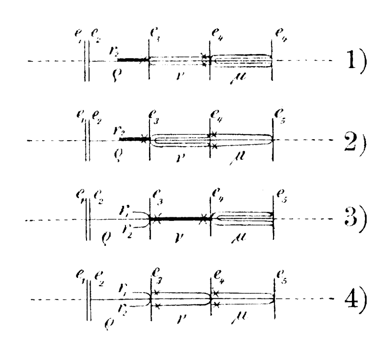
Diese zwei Probleme können wir aber auf unsere gewöhnliche Weise lösen; denn wie man sofort sieht, ist $\varphi^+(\nu, \varrho) = -\varphi^-(\nu, \varrho)$ und $\chi^+(\nu, \varrho) = \chi^-(\nu, \varrho)$. Nehmen wir also zur Lösung des ersten Problems die Lamé'schen Producte erster Art und sorgen dafür, dass auf der Seitenfläche $\mu = m_1$ die ψ-Function die Werthe $\varphi^+(\nu, \varrho)$ annimmt, so wird dieselbe von selber die Werte $\varphi^-(\nu, \varrho)$ auf der Seitenfläche $\mu = m_2$ annehmen. In ähnlicher Weise lösen wir das zweite Problem vermittelst der Lamé'schen Producte zweiter Art. —

Zum Schlusse bemerken wir noch, dass es auch andere Fälle giebt, in denen diese Methode der Zerlegung einer Function in ihren geraden und ihren ungeraden Bestandtheil angewandt werden *kann*, (vergl. hierüber S. 212 des nächsten Paragraphen). Wir haben aber hiermit diejenigen Fälle gekennzeichnet, in welchen dieselbe angewandt werden *muss*.

§ 3. Ueber die Randwerthaufgabe für das Innere eines Vollellipsoids.

Im vorigen Paragraphen haben wir nur erst solche Körper in Betracht gezogen, welche von Flächen eines allgemeinen Systems I'a) oder I''a) begrenzt sind. Haben wir es mit einem Körper zu thun, welcher von Flächen des Systems IIa) oder IIIa) begrenzt ist, so bedarf unser bisheriger Ansatz keiner Modification, so lange der betreffende Körper nicht bis an den Doppelpunkt bezw. biplanaren Punkt des Orthogonalsystems heranreicht. Solche Fälle brauchten also vom allgemeinen Standpunkte aus hier nicht weiter erwähnt zu werden. Unter denselben befindet sich aber das Vollellipsoid, welches schon des hohen historischen Interesses wegen, besonders aber auch deshalb eine genauere Discussion verdient, weil sich in einem wesentlichen Punkte die Lösung dieses Problems vereinfacht.

Zunächst fragt es sich: *Wie können wir das Innere eines Vollellipsoids als Ausartung bezw. Modification eines Körpers ansehen, welcher von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist?* Oder, was auf dasselbe hinauskommt: *Wie können wir das Vollelipsoid durch Segmente im Schema charakterisiren?*



Man kann dies in viererlei Weisen thun, wie die nebenstehenden Schemata zeigen. Hierbei bemerke man vor allen Dingen den wesentlichen Unterschied, welcher zwischen den zwei ersten und den zwei letzten besteht. In Schema 3) und 4) erscheint das begrenzende Ellipsoid nämlich in zwei Stücke getheilt, bei 1) und 2) aber nicht. Wegen seiner besonderen Symmetrie wählte Lamé das letzte der obenstehenden Schemata*), welches dann auch von seinen Nachfolgern beibehalten ist. Dagegen gestatten die Schemata 1) und 2) eine wenigstens formal einfachere Behandlung des Potentialproblems, und aus diesem Grunde wird das Schema 1)

---

*) Selbstverständlich ist bei Lamé, und auch bei Anderen, nicht von Schematen die Rede, sondern von der Art, wie man die Coordinaten einzuführen hat. Dass demselben aber auch die Festlegungen der Schemata 1) und 2) nicht fremd waren, ersieht man aus Seite 315 seiner „Leçons sur les fonctions inserses des transcendantes". Man vergl. auch S. 113 dieses Bandes wegen der Abweichung zwischen Lamé's Bezeichnung und der unserigen.

in dem gerade erschienenen Lehrbuch von Byerly zu Grunde gelegt. Hier wollen wir aber alle vier Schemata gleichmässig berücksichtigen.

Was zunächst die zum Ellipsoid gehörigen Lamé'schen Producte betrifft, so sehen wir, dass dieselben in allen vier Fällen die nämlichen sind. In der That hat man, nach Vorschrift des vorigen Paragraphen, alle drei Factoren des Lamé'schen Productes $E'(\mu)\cdot E''(\nu)\cdot E'''(\varrho)$ als Fundamentalzweige und zwar E' in den Punkten e_5 und e_4, E'' in e_4 und e_3 und E''' im Punkte e_3 zu wählen. Ferner müssen $E'(\mu)$ und $E''(\nu)$ im Punkte e_4 zu einem und demselben Exponenten gehören und ebenfalls $E''(\nu)$ und $E'''(\varrho)$ im Punkte e_3. Wir bekommen also acht verschiedene Gattungen Lamé'scher Producte, welche zum Ellipsoid gehören. Dieselben können folgendermassen durch die in den Punkten $e_3\,e_4\,e_5$ auftretenden Exponenten unterschieden werden:

$$\begin{array}{ccccccccc} e_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ e_4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ e_5 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}. \end{array}$$

Hat man auf eine dieser Weisen die Grenzbedingungen festgelegt, so wendet man auf die einfachen Intervalle e_3e_4 und e_4e_5 das Oscillationstheorem an, wodurch wir bei jeder der acht Gattungen ∞^2 Lamé'sche Producte bekommen.

Bis zu diesem Punkte ist die Behandlung bei allen vier Schematen dieselbe. Jetzt aber tritt ein wesentlicher Unterschied ein, je nachdem wir es mit einem der zwei ersten oder aber mit einem der zwei letzten Schemata zu thun haben.

Fassen wir zunächst die Schemata 1) und 2) ins Auge, so sehen wir, dass es nur nöthig ist die Doppelreihe zu bilden, welche aus sämmtlichen zum Ellipsoid gehörigen Lamé'schen Producten besteht, und die Coefficienten dann dadurch zu bestimmen, dass man, nachdem man $\varrho = r_2$ gesetzt hat, mit $(\mu - \nu)\cdot du \cdot dv$ multiplicirt und über die ganzen μ- und ν-Segmente integrirt. Hiernach werden die Lösungen für die Schemata 1) und 2) sich nur durch die Integrationsgrenzen in den Coefficienten unterscheiden.

Wenden wir uns jetzt zu den Schematen 3) und 4), so sehen wir uns genöthigt die Doppelreihe in zwei Theile zu spalten, indem wir die vier Gattungen Lamé'scher Producte, welche bei e_3 den Exponenten 0 haben, von den anderen vier Gattungen trennen, welche dort den Exponenten $\frac{1}{2}$ haben. Die erste der zwei so gebildeten Reihen wird

dann, wenn $\varrho = r_1$, dieselben Werthe annehmen als wenn $\varrho = r_2$, die zweite aber wird, wenn $\varrho = r_2$, das entgegengesetzte Vorzeichen haben als wenn $\varrho = r_1$. Dementsprechend müssen wir die Function, welche die Werthe angibt, die das Potential auf der Oberfläche annimmt, in die Summe zweier Functionen spalten, von denen die erste dieselben Werthe in entsprechenden Punkten der zwei Hälften $\varrho = r_1$ und $\varrho = r_2$ des Ellipsoids annimmt, die zweite aber entgegengesetzte Werthe*). Die Coefficienten der zwei Theile der Doppelsumme bestimmen wir dann so, dass, wenn $\varrho = r_1$, der erste bezw. zweite Theil die erste bezw. zweite der obenerwähnten Functionen darstellt. Dies machen wir natürlich dadurch, dass wir mit $(\mu - \nu)\, du \cdot dv$ multipliciren und über die ganzen Segmente μ und ν integriren. Die Lösungen des Problems für die zwei Schemata 3), 4) unterscheiden sich also nur durch die Integrationsgrenzen in den Coefficienten.

Wie oben bemerkt wählte Lamé das Schema 4) und sah sich also genöthigt, die Grenzwerthe des Potentials in zwei Bestandtheile zu zerlegen. Hiermit hat er sich aber nicht begnügt, sondern hat, um eine möglichst symmetrische Behandlungsweise des Problems zu bekommen, diese Grenzwerthe in *acht* Bestandtheile zerlegt, welche sich auf den acht Octanten des Ellipsoids gerade so verhalten, wie die acht obenerwähnten Gattungen Lamé'scher Producte. Dementsprechend bildet er acht verschiedene Doppelreihen, und bestimmt dann die Coefficienten derselben in gewöhnlicher Weise durch Integration über die einfachen Intervalle μ und ν**). Bei dieser Behandlung ist es natürlich im Grunde gleichgültig, von welchem Schema man ausgeht.

Kehren wir jetzt zu den einzelnen zum Ellipsoid gehörenden Lamé'schen Producten zurück, so sehen wir, dass *die drei Factoren eines beliebigen solchen Productes* nicht mehr, wie es bei anderen Körpern der Fall ist, drei verschiedene Lösungen einer Lamé'schen Gleichung sind, sondern *bis auf constante Factoren geradezu eine und dieselbe Lamé'sche Function sind*; denn zwei Lösungen einer Lamé'schen

---

*) Ist die Flächenschaar durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda - e_3} + \frac{y^2}{\lambda - e_4} + \frac{z^2}{\lambda - e_5} = -1$$

in Cartesischen Coordinaten gegeben, so werden die zwei Hälften des Ellipsoids durch die Ebene $x = 0$ von einander getrennt. Dementsprechend haben wir die auf dem Ellipsoid gegebene Function $F(x, y, z)$ in zwei Functionen zu spalten, welche in Bezug auf x gerade, bezw. ungerade sind.

**) Man vergl. den öfters erwähnten Aufsatz von Klein „Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind", Math. Ann. Bd. 18.

Gleichung, welche in einem singulären Punkte zu demselben Exponenten gehören, sind bis auf einen constanten Factor (welcher natürlich imaginär sein kann) einander identisch.

Hieraus ziehen wir dann weiter, durch eine einfache functionentheoretische Ueberlegung, folgende wichtige Folgerung:

Die Lamé'schen Functionen, welche in den zum Vollellipsoid gehörigen Lamé'schen Producten auftreten, sind algebraisch, und zwar bis auf etwa vorkommende Factoren $\sqrt{\lambda - e_3}$, $\sqrt{\lambda - e_4}$, $\sqrt{\lambda - e_5}$ *rational.*

Nehmen wir noch, der Einfachheit halber, den zweifachen Punkt $e_1 = e_2$ im Unendlichen an, *so werden die Lamé'schen Functionen, abgesehen von den soeben genannten Factoren, ganze rationale Functionen sein.*

Um diesen Satz zu beweisen führen wir folgende Bezeichnung ein: Es bedeute $E_{m,n}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5}(\lambda)$ diejenige Lamé'sche Function, welche in den Intervallen $e_3 e_4$ und $e_4 e_5$ m- bezw. n-mal verschwindet und in den Punkten e_3, e_4, e_5 bezw. zu den Exponenten $\frac{\varepsilon_3}{2}$, $\frac{\varepsilon_4}{2}$, $\frac{\varepsilon_5}{2}$ gehört. Hierbei wird natürlich jede der Zahlen ε_3, ε_4, ε_5 entweder den Werth 0 oder den Werth 1 haben. Wir wollen dann zeigen, dass die Function:

$$\Phi_{m,n}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5}(\lambda) = \frac{E_{m,n}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5}(\lambda)}{\sqrt{(\lambda - e_3)^{\varepsilon_3}(\lambda - e_4)^{\varepsilon_4}(\lambda - e_5)^{\varepsilon_5}}}$$

eine ganze rationale Function von λ ist. Zunächst sehen wir sofort, dass die Function Φ keinen singulären Punkt im Endlichen besitzt, insbesondere keinen Verzweigungspunkt. Folglich kann auch der Punkt $\lambda = \infty$ kein Verzweigungspunkt sein, da eine Function ohne natürliche Grenze nicht blos an einer Stelle verzweigt sein kann. Nun wissen wir aber, dass der Punkt $\lambda = \infty$ ein regulärer Punkt der betreffenden Lamé'schen Gleichung ist. Folglich verhält sich $\Phi(\lambda)$ in diesem Punkte wie $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\varkappa}$ *). Soll nun $\lambda = \infty$ kein Verzweigungspunkt von Φ sein, so ist es offenbar nothwendig, dass $\varkappa$ eine ganze reelle Zahl sein soll. Es ist aber klar, dass $\varkappa$ keine *positive* ganze Zahl sein kann, denn sonst würde Φ überhaupt keinen Unendlichkeitspunkt besitzen, und müsste demnach einem wohlbekannten Satze der Functionentheorie zufolge eine blosse Constante sein. Wir sehen also,

---

*) Wir haben den Fall nicht erwähnt, in welchem logarithmische Irrationalitäten im Punkte $\lambda = \infty$ auftreten, denn bei ihm wird $\lambda = \infty$ *stets* ein Verzweigungspunkt sein.

dass Φ bei $\lambda = \infty$ eine polare Unstetigkeit besitzt, und folglich eine ganze rationale Function ist.

Die Function $\Phi_{m,n}(\lambda)$ ist offenbar mindestens vom Grade $m + n$, weil sie nach Voraussetzung m bezw. n Wurzeln in den Intervallen $e_3 e_4$ bezw. $e_4 e_5$ besitzt. Es besteht aber ferner der Satz, dass ihr Grad diese Zahl nicht übertreffen kann:

Unsere Function $\Phi_{m,n}(\lambda)$ *ist eine ganze rationale Function vom Grade* $m + n$.

Um diesen Satz zu beweisen verfahren wir folgendermassen. Offenbar genügt die Function Φ einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche in den Punkten e_3, e_4, e_5 ∞ singuläre Punkte hat, aber auch nur in ihnen*). Folglich kann die Function Φ ausser in den Punkten e_3, e_4, e_5 keine mehrfachen Wurzeln besitzen. In diesen Punkten besitzt sie aber überhaupt keine Wurzeln. Andererseits haben wir Φ so construirt, dass es in den Intervallen $e_3 e_4$ und $e_4 e_5$ genau m bezw. n Wurzeln besitzt. Um also nachzuweisen, dass Φ vom Grade $m + n$ ist, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass ausser diesen $m + n$ Wurzeln keine anderen Wurzeln existiren.

Dieselben Ueberlegungen, durch welche wir das Oscillationstheorem selber bewiesen, würden uns mit Leichtigkeit zum Resultate führen, dass ausser in den Intervallen $e_3 e_4$, $e_4 e_5$ keine *reellen* Wurzeln existiren können. Dagegen sind unsere früheren Methoden durchaus nicht geeignet, die Abwesenheit complexer Wurzeln nachzuweisen. Zu diesem Zwecke wollen wir jetzt eine Methode von Stieltjes auseinandersetzen**).

---

*) Man berechnet als Differentialgleichung für $\Phi_{m,n}^{\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5}(\lambda)$ die folgende:

$$\frac{d^2\Phi}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon_3 + 1}{\lambda - e_3} + \frac{2\varepsilon_4 + 1}{\lambda - e_4} + \frac{2\varepsilon_5 + 1}{\lambda - e_5}\right)\frac{d\Phi}{d\lambda} +$$
$$+ \frac{[(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + 1) - A]\lambda + B'}{4(\lambda - e_3)(\lambda - e_4)(\lambda - e_5)}\Phi = 0.$$

**) Acta Math. Bd. 6, 1885. Im Texte verallgemeinern wir die Sätze von Stieltjes durch Hinzunahme complexer Grössen; andererseits aber führen wir die Untersuchungen nur für die von uns gebrauchten Fälle aus. In der That treten bei Stieltjes nicht drei sondern beliebig viele singuläre Punkte auf; andererseits werden die Grössen ε_i nicht auf die Werthe 0 und 1 beschränkt, sondern es wird nur verlangt, dass die Grössen $\frac{2\varepsilon_i + 1}{4}$ positiv sein sollen, d. h. Stieltjes betrachtet Differentialgleichungen allgemeinerer Art wie die von Φ befriedigte Gleichung, indem er die Exponentendifferenzen nicht auf den Werth $\frac{1}{2}$ beschränkt.

Stieltjes denkt sich auf einer geraden Linie die Punkte e_i als festgehaltene Massenpunkte von den Massen $\frac{2\varepsilon_i+1}{4}$, dann aber auf dieser Geraden $\varkappa$ bewegliche Massenpunkte z_i von der Masse Eins. Alle diese Massenpunkte stossen sich nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials ab, d. h. mit Kräften, welche den Massen direct, den Entfernungen umgekehrt proportional sind. Dann behauptet Stieltjes: *Liegen die Punkte z_i im Gleichgewicht, so sind sie die Wurzeln einer Function $\Phi^{\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5}(\lambda)$.*

Ehe wir diesen Satz beweisen, wollen wir ihn dadurch verallgemeinern, dass wir die singulären Punkte e_i complex werden lassen und dementsprechend die Massenpunkte nicht auf eine Gerade beschränken, sondern beliebig in einer Ebene gelegen denken. Dann bleibt der soeben ausgesprochene Satz ungeändert bestehen.

Zum Beweise bemerken wir, dass das Gesammtpotential V des Massenpunktsystems einfach der reelle Theil folgender Function:

$$F = \sum_{i=1}^{i=\varkappa}\sum_{j=1}^{j=\varkappa}{}' \log(z_i - z_j) + \sum_{i=3}^{i=5}\sum_{j=1}^{j=\varkappa}\frac{2\varepsilon_i+1}{4}\cdot\log(z_j - e_i)$$

ist, wo der der ersten Doppelsumme beigefügte Strich bedeuten soll, dass diejenigen Terme wegzulassen sind, für welche $i = j$. Bezeichnen wir nun durch $z_l = x_l + \sqrt{-1}\,y_l$ einen beliebigen der beweglichen Massenpunkte, so besteht die Gleichgewichtsbedingung bekanntlich darin, dass:

$$\frac{\partial V}{\partial x_l} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_l} = 0.$$

Setzen wir nun:

$$F = V + W\sqrt{-1},$$

so haben wir nach bekannten Cauchy'schen Sätzen über monogene Functionen:

$$\frac{\partial F}{\partial z_l} = \frac{\partial F}{\partial x_l} = \frac{\partial V}{\partial x_l} + \frac{\partial W}{\partial x_l}\sqrt{-1} = \frac{\partial V}{\partial x_l} - \frac{\partial V}{\partial y_l}\sqrt{-1}.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für Gleichgewicht besteht also darin, dass für alle Punkte z_l $\frac{\partial F}{\partial z_l} = 0$. Nun ist aber:

$$\frac{\partial F}{\partial z_l} = \sum_{i=1}^{i=\varkappa}{}' \frac{1}{z_l - z_i} + \sum_{i=3}^{i=5}\frac{2\varepsilon_i+1}{4}\cdot\frac{1}{z_l - e_i};$$

oder wenn wir schreiben: $\Phi(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_\varkappa)$:

$$\frac{\partial F}{\partial z_l} = \frac{\Phi''(z_l)}{2\,\Phi'(z_l)} + \sum_{i=3}^{i=5} \frac{2\,\varepsilon_i + 1}{4} \cdot \frac{1}{z_l - e_i},$$

wo die Striche Differentiation nach z bedeuten. Es muss also der Ausdruck:

$$\frac{\Phi''(z)}{2\,\Phi'(z)} + \sum_{i=3}^{i=5} \frac{2\,\varepsilon_i + 1}{4} \cdot \frac{1}{z - e_i},$$

und folglich auch:

$$\Phi''(z) + \Phi'(z) \sum_{i=3}^{i=5} \frac{2\,\varepsilon_i + 1}{2} \cdot \frac{1}{z - e_i}$$

für $z = z_1, z_2, \ldots z_\varkappa$ verschwinden. Es muss also offenbar sein:

$$\Phi''(z) + \Phi'(z) \sum_{i=3}^{i=5} \frac{2\,\varepsilon_i + 1}{2} \cdot \frac{1}{z - e_i} = \frac{A'z + B'}{(z - e_3)(z - e_4)(z - e_5)} \cdot \Phi;$$

und dies ist geradezu die oben mitgetheilte Differentialgleichung der Function Φ*).

Nun können aber alle Schritte des hiermit geführten Beweises offenbar auch in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden, wodurch wir folgenden Satz gewinnen:

Sind $z_1, \ldots z_\varkappa$ die Wurzelpunkte einer ganzen rationalen Function Φ, so werden sich dieselben unter unserer Voraussetzung im Gleichgewicht befinden.

Hieraus folgt sofort:

Alle Wurzelpunkte der ganzen rationalen Functionen Φ müssen innerhalb des Dreiecks liegen, welches e_3, e_4, e_5 als Eckpunkte besitzt.

Sind insbesondere e_3, e_4, e_5 reell, so wird dieses Dreieck auf die Strecke $e_3 e_5$ der reellen Axe zusammenschrumpfen, und wir bekommen den gewünschten Satz, dass alle Wurzeln der Function Φ auf dieser Strecke liegen, w. z. b. w.**)

Der Umstand, dass uns im Falle des Vollellipsoids das Oscillationstheorem auf ganze rationale Functionen führt, ermöglicht es uns,

*) Den hiermit bewiesenen Satz, welcher, wie gesagt, nur für reelle e_i und z_i von Stieltjes ausgesprochen wurde, benutzte dieser Mathematiker, um einen höchst anschaulichen Beweis des Oscillationstheorems in dem hier betrachteten Falle zu geben. In der That ist es ohne Weiteres klar, dass wenn wir die k Punkte auf irgend eine Weise zwischen den zwei Intervallen $e_3 e_4$ und $e_4 e_5$ vertheilen, sie ohne die Punkte e zu überschreiten ins Gleichgewicht kommen können, dass es also für jede Vertheilungsweise eine Function Φ giebt.

**) Dieses selbe Resultat könnte man auf ganz anderem Wege ableiten, indem man (K) die Abbildung vermöge der Schwarz'schen s-Function in diesem Falle genau untersucht.

die Werthe der accessorischen Parameter algebraisch zu bestimmen. In der That berechnet man als Exponenten des Punktes $\lambda = \infty$ die Werthe: $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4A}}{4}$, und es ist klar, dass das obere Vorzeichen nicht zu unserer Lösung gehören kann, weil es einen positiven Exponenten liefert. Bezeichnen wir andererseits durch $m + n$ den Grad der Function Φ, so werden wir offenbar die Gleichung haben:

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 4A}}{4} = -m - n - \frac{\varepsilon_3}{2} - \frac{\varepsilon_4}{2} - \frac{\varepsilon_5}{2},$$

woraus folgt:

$$A = (2(m + n) + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)(2(m + n) + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + 1).$$

Setzen wir also:

$$N = 2(m + n) + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5,$$

wo dann N eine ganze positive Zahl mit Einschluss der Null sein muss, so bekommen wir folgendes Resultat:

Bei den beim Vollellipsoid auftretenden Lamé'schen Functionen hat der accessorische Parameter A die Gestalt $N(N + 1)$, wo N eine ganze positive Zahl bedeutet.

Es gehören natürlich zu jeder Zahl N mehrere Functionen E. Unterscheiden wir nämlich, wie auf Seite 211, zwischen den acht Arten Lamé'scher Functionen, so sehen wir, dass je nachdem N gerade oder ungerade ist, die einen oder die anderen vier Fälle vorkommen werden, wie wir durch folgende Tabelle angeben:

N gerade				N ungerade			
I.	$\varepsilon_3 = 0,$	$\varepsilon_4 = 0,$	$\varepsilon_5 = 0$	II.	$\varepsilon_3 = 0,$	$\varepsilon_4 = 0,$	$\varepsilon_5 = 1$
V.	$\varepsilon_3 = 1,$	$\varepsilon_4 = 1,$	$\varepsilon_5 = 0$	III.	$\varepsilon_3 = 0,$	$\varepsilon_4 = 1,$	$\varepsilon_5 = 0$
VI.	$\varepsilon_3 = 1,$	$\varepsilon_4 = 0,$	$\varepsilon_5 = 1$	IV.	$\varepsilon_3 = 1,$	$\varepsilon_4 = 0,$	$\varepsilon_5 = 0$
VII.	$\varepsilon_3 = 0,$	$\varepsilon_4 = 1,$	$\varepsilon_5 = 1$	VIII.	$\varepsilon_3 = 1,$	$\varepsilon_4 = 1,$	$\varepsilon_5 = 1.$

Nun können aber die $m + n$ Nullstellen offenbar auf $m + n + 1$ Weisen auf die zwei Intervalle $e_3 e_4$ und $e_4 e_5$ vertheilt werden. Folglich werden wir die folgenden Anzahlen von Functionen in den acht Fällen haben:

N gerade		N ungerade	
I.	$\frac{N}{2} + 1$	II.	$\frac{N+1}{2}$
V.	$\frac{N}{2}$	III.	$\frac{N+1}{2}$
VI.	$\frac{N}{2}$	IV.	$\frac{N+}{2}$
VII.	$\frac{N}{2}$	VIII.	$\frac{N-1}{2}$

also *für ein gegebenes N, sei es gerade oder ungerade, gibt es stets $2N+1$ Lamé'sche Functionen.*

Es wird also, dem Oscillationstheorem zufolge, für jeden Werth $A = N(N+1)$ des einen accessorischen Parameters $2N+1$ verschiedene Werthe des anderen accessorischen Parameters B geben, welche zu unseren Lamé'schen Functionen gehören*). Dieselben ergeben sich als Wurzeln höherer algebraischer Gleichungen, wenn man nach dem ursprünglichen Lamé'schen Ansatze Reihenentwickelungen der gewünschten Art in die Lamé'sche Differentialgleichung einsetzt und dann verlangt, dass dieselben nur Terme mit positiven Exponenten enthalten sollen, d. h. dass sie nach einer endlichen Anzahl von Termen abbrechen.

Hiermit wollen wir die Discussion des Vollellipsoids abschliessen, indem wir in umgekehrter Richtung wie Lamé fortschreitend gerade zum Ausgangspunkte Lamé's gekommen sind.

§ 4. **Ueber die Randwerthaufgabe für Körper, welche durch ausgeartete Cycliden begrenzt sind, deren Schemata aber nur allgemeine Segmente enthalten.**

Wie schon zu Anfang des vorigen Paragraphen bemerkt, haben wir mit den bisherigen Erläuterungen nicht nur den Fall solcher Körper erledigt, welche von Cycliden I'a) oder I''a) begrenzt sind, sondern auch solcher Körper, deren Begrenzung von Cycliden II a) oder III a) gebildet wird, sofern der betreffende Körper nicht bis an den Doppelpunkt bezw. biplanaren Punkt des Orthogonalsystems herantritt. Tritt dieser Fall aber ein, so haben wir es mit einem Körper zu thun, dessen Schema ein specialisirtes Segment enthält, und solche Fälle wollen wir für den nächsten Paragraphen aufsparen.

Bei allen anderen Orthogonalsystemen haben wir es mit Segmenten zu thun, welche in zwei bezw. drei verschiedenen Schematen liegen. Die jedesmaligen ergänzenden Schemata (worin die Coordinaten mit μ', ν', ϱ' bezeichnet werden), welche, sofern wir uns auf die Coordinatensysteme von Seite 102—104 beschränken, zu Kugelbüscheln gehören, sind aber, wie wir wissen, aus der nächsten Umgebung der zusammenfallenden Punkte entstanden, indem wir diese Umgebung beim Zusammenfallen der singulären Punkte unendlichfach vergrösserten. Wir

*) Was die Aufeinanderfolge dieser $2N+1$ Werthe von B angeht, so vergl. man den Aufsatz von Klein „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Gleichung", Math. Ann. Bd. 40.

können uns also die Segmente, welche in diesen Schematen vorkommen, als unendlich kurze Segmente des ursprünglichen Schemas vorstellen, welche in, bezw. unendlich nahe an dem dort verschwindenden Intervalle liegen. Indem wir die Sache so auffassen, haben wir sofort Anschluss an die Entwickelungen von III, 1. § 3. Allerdings haben wir dort nur solche Segmente betrachtet, welche einen endlichen Theil (vielleicht grösser wie das Ganze) des Intervalles bildeten, worin sie liegen, während wir jetzt mit Segmenten zu thun haben, welche in gewissen Fällen nur einen unendlich kleinen Theil ihres Intervalles bilden.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, in dem ein Kugelbüschel mit eintheiligem Grundkreise vorhanden ist. Das zu diesem Kugelbüschel gehörige Segment ist dann *in* einem zweifachen Punkte (11) zu suchen, und zwar bildet dasselbe einen endlichen Theil des dort verschwundenen Intervalles. Sofern wir also in diesem Segmente Oscillation vorschreiben wollen, werden wir geradezu von Kapitel I, § 3 Gebrauch machen können, und werden also insofern eine Vereinfachung des allgemeinen Ansatzes bekommen, als wir die Exponenten des betreffenden zweifachen Punktes oder, was auf dasselbe hinauskommt, die zugehörige lineare Verbindung der accessorischen Parameter wirklich rechnerisch bestimmen können.

Haben wir es andererseits mit einem Kugelbüschel mit nulltheiligem Grundkreise zu thun, so wird das Segment unendlich kurz von der ersten Ordnung sein und unmittelbar *ausserhalb* eines zweifachen Punktes (11) liegen. Das betreffende Segment liegt also in einem endlichen Intervalle, ist aber selber unendlich kurz, ein Fall, welcher bis jetzt nicht ausdrücklich in Betracht gezogen wurde. Man sieht jedoch sofort ein, dass sämmtliche Erläuterungen von S. 169 wörtlich bestehen bleiben, nur dass wir jetzt das Zeitintervall T mit

$$\int_{m'_2}^{m'_1} \frac{dx'}{2\sqrt{x'(x'-1)}} = \frac{1}{2} \log \frac{2m'_2 - 1 + 2\sqrt{m'_2(m'_2-1)}}{2m'_1 - 1 + 2\sqrt{m'_1(m'_1-1)}}$$

proportional setzen müssen. m_1 und m_2 sind jetzt beide grösser als 1. Wir sehen, dass T immer endlich wird mit Ausnahme der Fälle $m_1 = \infty$ oder $m_2 = \infty$, in welchen Fällen T unendlich wird. Diese Fälle haben wir aber erst im nächsten Paragraphen zu behandeln. Unsere Hüllcurven werden also hier in Hüllpunkte ausarten, und dieser Fall wird sich nur insofern von dem soeben besprochenen unterscheiden, als sich die Exponenten des zweifachen Punktes jetzt nicht mehr reell sondern rein imaginär bestimmen.

Es bleiben also nur noch die Fälle zu besprechen, in denen ein

Kugelbüschel mit Punktgrundkreis vorkommt, also zunächst die Fälle eines dreifachen Punktes (21) und eines vierfachen Punktes (31). Beidemal wird das unendlich kurze Segment des Kugelbüschels in dem unendlich kurzen Intervalle des mehrfachen Punktes zu suchen sein. Trotzdem werden aber die Sätze von Seite 173 in diesen Fällen keine Anwendung finden. In der That ist das Segment (vergl. Seite 95, 96), sofern es kein specialisirtes Segment ist, unendlich klein von der zweiten bezw. dritten Ordnung, wenn wir das Intervall, in welchem es liegt, von der ersten Ordnung nennen. Wird dieser Umstand berücksichtigt, so sehen wir mit leichter Mühe, dass wir es auch hier mit Hüllpunkten zu thun haben, gerade wie bei einem zweifachen Punkte. *Der ganze Ansatz bleibt also auch hier erhalten, nur kann man überhaupt nicht mehr von Exponenten reden.*

Aber auch bei den Reihenentwickelungen selbst tritt in allen diesen Fällen eine gewisse Vereinfachung ein. Setzen wir voraus, um die Ideen zu fixiren, dass es das Segment $m_1 m_2$ ist, welches in bezw. unmittelbar neben einem mehrfachen Punkte liegt. An den Lamé-schen Producten $E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\varrho)$ wird dann nämlich der Faktor $E'_{m,n}(\mu)$ durch eine Lamé'sche Function $n = 4$*) von μ' zu ersetzen sein. Diese Lamé'sche Function wird dann nicht mehr von den beiden Oscillationszahlen m, n abhängen, sondern nur noch von der ersten derselben. Demgemäss bezeichnen wir sie als $E'_m(\mu')$. Wir können also die Doppelreihe, in welche wir die willkürliche Function $f(\mu, \nu)$ entwickeln, gewissermassen zerspalten, indem wir schreiben:

$$f(\mu', \nu) = \sum_1^\infty{}^m \left(\sum_1^\infty{}^n B_{m,n} \cdot E''_{m,n}(\nu) \right) \cdot E'_m(\mu').$$

Bezeichnen wir nun die in Klammern stehende Reihe durch $C_m(\nu)$, so ist die Reihe:

$$f(\mu', \nu) = \sum_1^\infty{}^m C_m(\nu) \cdot E'_{m,n}(\mu'),$$

was die Variable μ' oder vielmehr u' angeht, einfach eine Fourier-sche Reihe, denn die Lamé'schen Functionen $n = 4$ sind, wie wir wissen, einfach trigonometrische Functionen von u'. Die Coefficienten dieser Reihe lassen sich also durch bekannte Formeln bestimmen. Erst hinterher hat man die Aufgabe, in der Reihenentwickelung:

---

*) Diese Zahl n ist natürlich mit der Oscillationszahl n, welche hier vorkommt, nicht zu verwechseln.

$$C_m(v) = \sum_1^\infty {}_n B_{m,n} \cdot E''_{m,n}(v)$$

die Coefficienten $B_{m,n}$ zu bestimmen, was vermöge der auf Seite 156 abgeleiteten Formeln ohne Mühe geleistet werden kann. Wir ziehen es aber vor, die Werthe dieser Coefficienten $B_{m,n}$ dadurch aus der allgemeinen Formel von Seite 157 abzuleiten, dass wir dort den öfters benutzten Grenzübergang von der Variablen μ zur Variablen μ' anwenden. Hierdurch bekommt man die Formel:

$$B_{m,n} = \frac{\int\int (e_i - v) f(\mu', v) \cdot E'_m(\mu') \cdot E''_{m,n}(v) \cdot du' \cdot dv}{\int (E'_m(\mu'))^2 du' \cdot \int (e_i - v)(E''_{m,n}(v))^2 dv}.$$

Hierbei bemerke man, dass sich der Nenner in zwei einfache Integrale gespalten hat. Das erste dieser Integrale können wir dann vermöge bekannter Formeln der Integralrechnung auswerthen*). Hierauf gehen wir aber, da es für unseren allgemeinen Ansatz von keiner Bedeutung ist, nicht näher ein.

Gehen wir jetzt noch zu den Fällen über, in welchen die beiden Segmente, in denen Oscillation verlangt wird (sagen wir die Segmente $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$), in bezw. neben verschwindenden Intervallen liegen. Hier werden die *beiden* in Betracht kommenden Lamé'schen Functionen, nach Einführung der neuen Variablen μ', v', nur noch Lamé'sche Functionen $n = 4$ sein, und folglich nur noch jede von *einer* Oscillationszahl abhängen. Unsere Entwickelung wird also folgende sein:

$$f(\mu', v') = \sum_1^\infty {}_m \sum_1^\infty {}_n B_{m,n} E'_m(\mu') \cdot E''_n(v')$$

und dies ist einfach eine Fourier'sche Doppelreihe. Als Coefficienten bekommen wir dann:

$$B_{m,n} = \frac{\int\int f(\mu', v') E'_m(\mu') \cdot E''_n(v') \cdot du' \cdot dv'}{\int (E'_m(\mu'))^2 du' \cdot \int (E''_n(v'))^2 dv'},$$

wo sich wiederum die Integrale im Nenner auswerthen lassen.

Es bleiben noch solche Körper zu betrachten, welche durch Flächen des Orthogonalsystems R) von Seite 104 begrenzt sind, also recht-

*) Man findet nämlich als Werth dieses bestimmten Integrals, wenn man durch U' das dem Segment $m_1 m_2$ entsprechende Segment der u'-Axe bezeichnet, einfach $\frac{U'}{2}$, wobei vorausgesetzt ist, dass man die Function $E'_m(\mu')$ als Sinus oder Cosinus *ohne Factor* bestimmt.

winklige Parallelepipeda und deren Inversen. Hier liegen die drei Segmente in drei verschiedenen Schematen, welche man am zweckmässigsten (vergl. S. 98) gleichzeitig aus einem einzigen allgemeinen Schema abgeleitet denkt. Jedem von diesen Schemata entspricht eine Lamé'sche Gleichung $n = 4$ mit einem accessorischen Parameter k_i. Zwei von diesen k_i bestimmen wir, indem wir das Oscillationstheorem für Lamé'sche Functionen $n = 4$ auf zwei der Segmente anwenden. Hierauf wird das dritte k vermöge der identischen Relation:

$$k_3 + k_4 + k_5 = 0$$

bestimmt. Bilden wir nun unsere Doppelreihe, so haben wir nichts Anderes vor uns als eine Fourier'sche Doppelreihe, deren Coefficienten sich durch die bekannten Formeln bestimmen lassen.

Schliesslich mag noch der Umstand Erwähnung finden, dass sämmtliche Betrachtungen dieses Paragraphen auch dann noch bestehen bleiben, wenn man es mit unendlich kurzen *geschlossenen* Segmenten zu thun hat. Solche Segmente können selbstverständlich nur *in* einem *zweifachen* Punkte (11) vorkommen d. h. bei Kugelbüscheln mit eintheiligem Grundkreise.

Als Specialfall eines solchen Kugelbüschels wollen wir jetzt noch den Fall eines Ebenenbüschels näher betrachten. Solche Ebenenbüschel treten als Ergänzungen zu Schaaren von Rotationsflächen auf, und falls das zum Ebenenbüschel gehörige Segment ein geschlossenes ist, wird der betreffende Körper ein Rotationskörper sein. Nun kommt es in der mathematischen Physik oft vor, dass die auf den Seitenflächen des Körpers vorgeschriebenen Werthe des Potentials von dem Parameter φ des Ebenenbüschels unabhängig sind, und es leuchtet ein, dass dann auch die Werthe des gesuchten Potentials von φ unabhängig sein werden. Ein solches Potential wollen wir ein *Rotationspotential* nennen. In solchen Fällen verfährt man meist so, dass man von vornherein nur solche Lamé'sche Producte in Betracht zieht, welche selber von φ unabhängig sind. Dies heisst, dass wir nicht mehr von allen Hüllpunkten des unendlich kurzen geschlossenen Segmentes Gebrauch machen, sondern nur noch von dem ersten derselben, welcher keine Nullpunkte im Segment liefert. Anders ausgedrückt wir schreiben im mehrfachen Punkte den Exponenten Null vor, wodurch der sich auf φ beziehende Factor sich auf eine Constante reducirt. Wir stellen dann unser Potential in der Form einer einfachen Reihe (nicht mehr einer Doppelreihe) dar.

Dieses Alles können wir auch als speciellen Fall unseres allgemeinen Ansatzes ableiten, indem wir in den Formeln von Seite 221

$f(\mu', \nu)$ als eine Function von ν allein voraussetzen. Dann spaltet sich das im Zähler der Coefficienten B stehende Doppelintegral in das Product zweier einfachen Integrale, von denen das eine auf μ' sich beziehende Integral stets verschwindet mit Ausnahme des Falles, in welchem $E'(\mu')$ eine blosse Constante ist. Die Doppelreihe reducirt sich also in der That auf eine einfache Reihe.

§ 5. Ueber die Randwerthaufgabe für Körper, deren Schemata specialisirte Segmente enthalten. Integraldarstellungen.

Die Specialisirung eines Segmentes, mit welcher wir uns in diesem Paragraphen beschäftigen werden, besteht natürlich darin, dass einer oder alle beide seiner Endpunkte in singulären Punkten liegen. Sofern nur *einfache* singuläre Punkte als Begrenzungen der Segmente auftreten, bedarf unser Ansatz zur Behandlung der Randwerthaufgabe keiner Modification, und erfährt auch keine wesentliche Vereinfachung. Eine oder mehrere Begrenzungsflächen des Körpers werden dann durch Kugeln gebildet, und es können sogar zwei Seitenflächen auf derselben Kugel liegen und an einander grenzen, so dass sie scheinbar nur eine einzige Seitenfläche bilden. Der analytische Ansatz bleibt dabei, wie gesagt, bestehen, nur dass eine oder mehrere der Lamé'schen Functionen, welche vorkommen, Fundamentalzweige des bezüglichen singulären Punktes sein werden. Hierauf brauchen wir nicht näher einzugehen.

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, in welchem unser Segment durch einen mehrfachen singulären Punkt begrenzt wird. Wir haben schon im § 1 dieses Kapitels gesehen, dass in diesem Falle die zu diesem Endpunkte gehörige Seitenfläche auf eine Linie bezw. einen Punkt zusammenschrumpft, so dass unser Körper nur noch durch fünf eigentliche Seitenflächen begrenzt ist.

Diesem Umstande entsprechend werden wir die Randwerthaufgabe nicht mehr in sechs, sondern nur noch in fünf Einzelprobleme spalten, bei denen wir offenbar nicht mehr zu verlangen brauchen, dass das Potential auf der zusammengeschrumpften Seitenfläche geradezu verschwindet, sondern nur, dass es dort endlich bleibt.

Von diesen Einzelproblemen lassen sich nun einige mittelst unseres früheren Ansatzes behandeln.

a) Zunächst ist dies immer der Fall bei demjenigen Einzelproblem, bei welchem die Werthe des Potentials auf derjenigen Seitenfläche beliebig vorgeschrieben werden, welche der zusammengeschrumpften Seitenfläche gegenüber liegt. In der That haben wir in diesem Falle

Oscillation in zwei nicht specialisirten Segmenten zu verlangen, während im dritten specialisirten Segmente Lamé'sche Functionen auszusuchen sind, welche im betreffenden mehrfachen Punkte endlich bleiben, und wir haben auf S. 177 gesehen, dass dies immer möglich ist.

b) Aber auch in den anderen Fällen, in denen das Oscillationstheorem noch bestehen bleibt, können wir unsere bisherige Behandlungsweise ungeändert anwenden.

Dies ist zunächst der Fall (vergl. S. 177), wenn das eine unserer drei Segmente in dem verschwindenden Intervalle eines zweifachen singulären Punktes liegt, welcher den Endpunkt des specialisirten Segmentes bildet, und wir ausser in dem specialisirten Segmente noch in diesem unendlich kurzen Segmente Oscillation verlangen wollen.

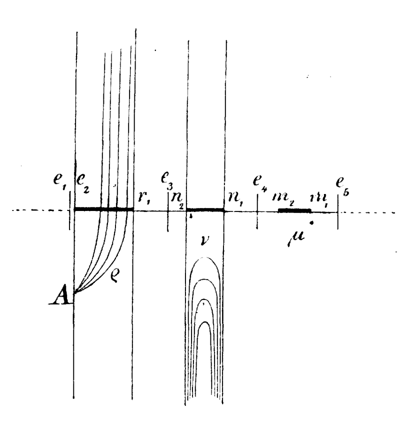
Aber auch wenn das verschwindende Segment nicht in einem zweifachen sondern in einem drei- oder vierfachen Punkte liegt, welcher den Endpunkt des specialisirten Segmentes bildet, ändert sich nichts Wesentliches, denn auch hier bleibt, wie sofort zu sehen ist, das Oscillationstheorem bestehen. Nur ein Fall bedarf einer näheren Ueberlegung, nämlich derjenige, in welchem das unendlich kurze Segment auch specialisirt ist und also nicht mehr von der zweiten bezw. dritten Ordnung ist. Auf diesen Fall kommen wir späterhin noch einmal zurück.

Dagegen bedarf unsere Methode offenbar einer wesentlichen Modification in denjenigen Fällen, in welchen das Oscillationstheorem nicht mehr aufrecht zu erhalten ist.

Betrachten wir zunächst, um die Ideen zu fixiren, einen Körper, welcher von sechs Flächen des Orthogonalsystems I) von S. 103 begrenzt ist. Lassen wir dann die eine Seitenfläche auf den Doppelpunkt des Orthogonalsystems zusammenschrumpfen, so bekommen wir ein Fünfflach, welches durch das nebenstehende Schema charakterisirt ist. Von den fünf hier auftretenden Einzelproblemen wird dasjenige, in welchem die Fläche $\varrho = r_1$ als ausgezeichnet erscheint, wie wir eben unter a) constatirt haben, von keinem besonderen Interesse für uns sein. Dagegen bedarf unser bisheriger Ansatz bei den anderen vier Einzelproblemen einer wesentlichen Modification.

Die zwei Einzelprobleme, in welchen $\mu = m_1$ und $\mu = m_2$ ausgezeichnete Seitenflächen sind, unterscheiden sich von einander nur unwesentlich, und es wird also genügen, wenn wir eins derselben, etwa das zweite, genauer betrachten. Aus demselben Grunde werden wir von den anderen zwei Einzelproblemen nur dasjenige betrachten, in welchem $\nu = n_2$ die ausgezeichnete Seitenfläche ist.

c) Fassen wir zunächst das Einzelproblem ins Auge, in welchem $\mu = m_2$ die ausgezeichnete Seitenfläche ist. Hier hätten wir das Oscillationstheorem auf die Segmente $n_1 n_2$, $r_1 e_1$ anzuwenden. Ein Blick auf die Figur lehrt uns aber, dass kein einziges Lamé'sches Product dem Oscillationstheorem gemäss zu bestimmen ist, indem die Hüllcurven der zwei Intervalle keine gemeinsame Tangente besitzen*). Trotzdem gibt es unendlich viele zum Körper gehörige Lamé'sche Producte, welche man bekommt, indem man unendlich viele Oscillationen im Segmente $r_1 e_1$ zulässt. Um dementsprechend die accessorischen Parameter zu bestimmen, brauchen wir nur sämmtliche Hülfsgeraden herauszugreifen, welche eine Hüllcurve des Segmentes $n_1 n_2$ berühren und die Ordinate in e_1 oberhalb des Punktes A schneiden. Diese Hülfsgeraden bilden nicht mehr eine discrete sondern so zu sagen eine *gemischte* Mannigfaltigkeit**). *Diesem Umstande entsprechend tritt an Stelle des einen Summenzeichens unserer Doppelreihe ein Integralzeichen ein, wie wir jetzt näher erläutern wollen.*



Da wir jetzt unendlich viele Halboscillationen im Segmente ϱ haben, so können wir unsere Lamé'schen Functionen nicht mehr als $E_{n,r}$ bezeichnen, denn es musste gleichförmig für alle zum Körper gehörige Lamé'sche Functionen $r = \infty$ gesetzt werden. Denken wir uns aber das Segment ϱ als nicht ganz bis an den Punkt e_1 heranreichend, und bezeichnen wir das entsprechende Segment der w-Axe $\left(w = \int \frac{d\varrho}{2\sqrt{f(\varrho)}}\right)$ durch $[w]$, dann wird die Zahl $\varkappa = \frac{r}{[w]}$ eine einfache Bedeutung haben. Es wird nämlich $\frac{1}{\varkappa}$ die durchschnittliche Länge einer Halboscillation im Segmente $[w]$ sein. Lassen wir nun das Segment ϱ bis an den Punkt e_1 sich erstrecken und damit das Segment $[w]$ unendlich lang werden, so wird, da die Kraft in unserem

*) Es scheint nicht ausgeschlossen zu sein, dass einige der Hüllcurven des Segmentes $n_1 n_2$ so hoch zu liegen kommen, dass doch eine begrenzte Anzahl solcher gemeinsamer Tangenten existiren. Ist aber das Segment $n_1 n_2$ hinreichend kurz, so werden die Verhältnisse jedenfalls so sein, wie sie in der Figur skizzirt werden.

**) Das Wort *gemischt* soll bedeuten, dass die Mannigfaltigkeit weder vollständig continuirlich noch vollständig discontinuirlich ist.

mechanischen Hülfsproblem eine endliche bleibt, die Zahl $\varkappa$ sich offenbar einer endlichen Grenze nähern. Diesen Grenzwerth wollen wir mit k bezeichnen. Jetzt bedeutet $\frac{1}{k}$ offenbar nichts anderes als den Grenzwerth, welchem sich die Längen der Halboscillationen mit wachsender Zeit nähern. Die Zahl k wird nach unendlich langer Zeit mit der Quadratwurzel aus der Intensität des Kraftcentrums direct proportional sein, und ist also geeignet die verschiedenen zum Körper gehörigen Functionen von einander zu unterscheiden. In der That werden die zu verschiedenen Zahlen k gehörenden Hülfsgeraden die Ordinate in e_1 in verschiedenen Punkten schneiden. Die Grösse k wollen wir den Lamé'schen Functionen als unteren Index hinzufügen, dieselbe jedoch in Klammern einschliessen um daran zu erinnern, dass sie keine Oscillationszahl ist. Die zum Körper gehörigen Lamé'schen Producte werden dann sein:

$$E'_{n,(k)}(\mu) \cdot E''_{n,(k)}(\nu) \cdot E'''_{n,(k)}(\varrho),$$

wobei k alle reellen Werthe von 0 bis ∞ annehmen kann, n aber nur alle reellen ganzzahligen Werthe von 1 bis ∞. Fügen wir jedem dieser Producte einen Coefficienten $A_{n,k}$ hinzu und addiren wir dieselben, so sehen wir, dass es jedenfalls nothwendig ist, damit dieses Aggregat einen endlichen Werth haben soll, dass die Coefficienten unendlich klein sein müssen. Schreiben wir also $A_{n,k} = a_{n,k} \cdot dk$, so werden wir unsere ψ-Function in folgender Form darstellen wollen:

$$\psi = \sum_1^\infty {}^n \int_0^\infty a_{n,k} \cdot E'_{n,(k)}(\mu) \cdot E''_{n,(k)}(\nu) \cdot E'''_{n,(k)}(\varrho) \cdot dk.$$

Setzen wir hierin $a_{n,k} \cdot E'_{n,(k)}(m_2) = b_{n,k}$, so haben wir nur noch, um unser Problem zu lösen, $b_{n,k}$ so zu bestimmen, dass:

$$f(\nu, \varrho) = \sum_1^\infty {}^n \int_0^\infty b_{n,k} \cdot E''_{n,(k)}(\nu) \cdot E'''_{n,(k)}(\varrho) \cdot dk.$$

Eine Formel zur Bestimmung der $b_{n,k}$ bekommt man sofort, wenn man den hier vorliegenden Fall wieder als Grenzfall betrachtet. Lassen wir das Segment ϱ nicht ganz bis an den Punkt e_1 heranreichen, so können wir schreiben:

$$f(\nu, \varrho) = \sum_1^\infty {}^n \sum_1^\infty {}^r B_{n,r} \cdot E''_{n,r}(\nu) \cdot E'''_{n,r}(\varrho),$$

wo die Coefficienten $B_{n,r}$ nach den gewöhnlichen Formeln zu bestimmen sind. Setzen wir ferner wie früher $\varkappa = \frac{r}{[w]}$ und bezeichnen

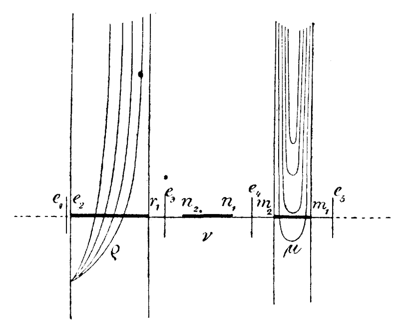
wir durch $\varDelta \varkappa$ den Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werthen von $\varkappa$, so haben wir offenbar $\varDelta \varkappa = \frac{1}{[w]}$. Wir können also schreiben:

$$f(\nu, \varrho) = \sum_1^\infty{}^n \sum_1^\infty{}^r B_{n,r} \cdot [w] \, E''_{n,(k)}(\nu) \cdot E'''_{n,(k)}(\varrho) \cdot \varDelta k.$$

Machen wir jetzt den Grenzübergang, so bekommen wir die Formel:

$$b_{n,(k)} = \lim (B_{n,r}[w]) = \lim_{r_2 = e_1} \left(\frac{\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{d\varrho}{2\sqrt{(\varrho)}} \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{n_1}^{n_2} (\nu - \varrho) f(\nu, \varrho) \cdot E''_{n,r}(\nu) \cdot E'''_{n,r}(\varrho) \, d\nu \cdot dw}{\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{n_1}^{n_2} (\nu - \varrho) \left\{ E''_{n,r}(\nu) \cdot E'''_{n,r}(\varrho) \right\}^2 d\nu \cdot dw} \right).$$

d) Gehen wir jetzt schliesslich zu dem Einzelprobleme über, in welchem $\nu = n_2$ die ausgezeichnete Seitenfläche ist, so sehen wir, dass sich die Sache jetzt etwas anders gestaltet, weil die Hüllcurven des Segmentes $m_1 m_2$ in demselben Sinne laufen, wie diejenigen des Segmentes $e_1 r_1$. Dieser Umstand bewirkt, dass, jedenfalls für hinreichend grosse Oscillationszahlen m, es eine endliche Anzahl von Tangenten der Hüllcurven des Segmentes μ geben wird, welche eine Hüllcurve des Segmentes ϱ berühren. Wir können



also für jede Oscillationszahl m eine endliche Anzahl von Lamé'schen Producten bestimmen, welche zu endlichen Werthen der Oscillationszahl r gehören. Für eine gegebene Zahl m darf aber die Zahl r eine bestimmte Grenze nicht überschreiten, es sei denn, dass wir unendliche Werthe von r zulassen. Soweit wir nun das Oscillationstheorem noch anwenden können, bleibt die Doppelreihe für ψ ungeändert; für die späteren Theile der Reihe wird aber, gerade wie im oben besprochenen Problem, das eine Summenzeichen zu einem Integralzeichen werden. Bezeichnen wir also durch M die kleinste Oscillationszahl m, für welche gemeinsame Tangenten existiren und durch r_m die grösste endliche Oscillationszahl r, welche wir neben der Oscillationszahl m vorschreiben können, so werden wir für ψ folgende Darstellung haben:

$$= \sum_M^\infty{}^m \sum_1^{r_m}{}^r A_{m,r} E'_{m,r}(\mu) \cdot E''_{m,r}(\nu) \cdot E'''_{m,r}(\varrho) + \sum_1^\infty{}^m \int_0^\infty a_{m,k} \cdot E'_{m,(k)}(\mu) \cdot E''_{m,(k)}(\nu) \cdot E'''_{m,(k)}(\varrho) \cdot dk,$$

wo die Coefficienten $A_{m,r}$ nach den gewöhnlichen Formeln, die $a_{m,k}$ ähnlich wie soeben zu bestimmen sind*).

Wir gehen jetzt noch kurz zu anderen Fällen über, in welchen ebenfalls Integraldarstellungen auftreten.

Erfüllt ein Segment ein Intervall, welches an beiden Enden durch einen zweifachen Punkt begrenzt ist, so wird sich, gerade wie oben, das eine Summenzeichen in ein Integralzeichen verwandeln. In diesem Falle kann auch niemals (vergl. die auf Seite 180 angegebene Gestalt der Hüllcurven), wie es in dem zuletzt betrachteten Falle geschah, ein Theil der Reihe unausgeartet bestehen bleiben.

Reichen andererseits alle beide Segmente, in welchen wir Oscillation vorschreiben wollen, bis an zweifache singuläre Punkte, so wird die Doppelreihe in ein Doppelintegral ausarten, dem Umstande entsprechend, dass jetzt die Mannigfaltigkeit der von uns in Betracht zu ziehenden Hülfsgeraden eine zweifach continuirliche ist. Dabei wird unter Umständen auch hier ein Theil der Reihe nur insofern ausarten, dass das eine Summenzeichen zum Integralzeichen wird; und es scheint sogar nicht ausgeschlossen zu sein, dass unter Umständen einige Glieder der Reihe ganz unausgeartet bestehen bleiben.

Haben wir es schliesslich nicht mit zweifachen, sondern mit drei- oder vierfachen Punkten zu thun, so bleibt unser bisheriger Ansatz im Wesentlichen ungeändert. Dass wir nichts Genaues über die relative Lage der Anfangstangenten der verschiedenen Hüllcurven wissen (vergl. Seite 179) hat nur zur Folge, dass wir nicht mehr behaupten können, dass die oben als r_m bezeichneten Grössen immer endlich sein werden.

Ueberhaupt haben wir in den hier berührten Fällen ein bis jetzt fast unerforschtes Gebiet. Es bleiben aber auch andere Fälle, in welchen bekanntere Integraldarstellungen vorkommen. Es sind diese Fälle diejenigen, in welchen unendlich kurze Segmente, in denen wir Oscillation verlangen, sich bis an mehrfache singuläre Punkte heranerstrecken; oder, was auf dasselbe hinauskommt, in welchen Segmente μ', ν', ϱ' in den ergänzenden Schematen bis an einen mehrfachen Punkt heranreichen.

Fassen wir z. B. einen Körper ins Auge, welcher von vier confocalen Kegeln zweiten Grades und einer Kugel, welche ihren Mittelpunkt in der Spitze der Kegel hat, begrenzt wird. Dieser Körper

---

*) Die Möglichkeit einer solchen Ausartung, wie sie hier eintritt, wurde vom Verfasser angedeutet am Schluss eines Aufsatzes „On some applications of Bessel's Functions with pure imaginary index“, Annals of Math. Bd. 6 (1892).

wird durch die nebenstehenden Schemata charakterisirt. In den vier Einzelproblemen, in welchen wir im Segmente ϱ' Oscillation verlangen, wird an Stelle des einen Summenzeichens ein Integralzeichen auftreten. In der That sehen wir nach den Angaben von Seite 219, dass in diesem Falle die Hüllpunkte des unendlich kurzen Segmentes ϱ sich in einem Punkte zusammenhäufen, nämlich in dem Punkte A, in welchem die Ordinate in e_1 von der Curve dritter Ordnung geschnitten wird. Dagegen können wir aber jetzt die Gesammtheit aller derjenigen Punkte der in e_1 errichteten Ordinate als Hüllpunkte zulassen, welche auf der einen Seite des Punktes A liegen, indem jeder von diesen Hüllpunkten unendlich vielen Oscillationen im Segmente ϱ (bezw. ϱ') entspricht. Da diese Hüllpunkte jetzt eine continuirliche Mannigfaltigkeit bilden, so wird, wie oben behauptet, das eine Summenzeichen sich in ein Integralzeichen verwandeln.

Gerade wie die Doppelreihe von Seite 220 sich spalten liess, so können wir auch hier unsere gemischte Reihen-Integraldarstellung spalten. Indem wir die früher gebrauchte Bezeichnung anwenden, können wir nämlich schreiben:

$$f(\nu, \varrho') = \int_0^\infty \Big(\sum_1^\infty {}^n b_{n,k} \cdot E''_{n,(k)}(\nu) \Big) \cdot E'''_{(k)}(\varrho') \cdot dk.$$

Setzen wir hier wie früher:

$$C_k = \sum_1^\infty {}^n b_{n,(k)} \cdot E''_{n,(k)}(\nu),$$

so haben wir zunächst C_k so als Function von ν zu bestimmen, dass

$$f(\nu, \varrho') = \int_0^\infty C_k \cdot E'''_{(k)}(\varrho') \cdot dk.$$

Dies ist aber einfach ein Fourier'sches Integral, denn es ist, wie wir wissen, $E'''_{(k)}(\varrho') = L \cdot \sin rk(w' - w_1')$, wo L eine beliebige Constante bedeutet, und w_1' den Werth des Integrals w', welcher dem Punkte $\varrho' = r'_1$ entspricht.

Aber auch ohne directe Bezugnahme auf die Formeln des Fourierschen Integrals können wir die Coefficienten $b_{n,k}$ bestimmen. In der That haben wir gerade wie früher Seite 227:

$$b_{n,k} = \lim_{r_2'=\infty} \left[\frac{\int\limits_{r_1'}^{r_2'} dw' \cdot \int\limits_{r_1'}^{r_2'}\int\limits_{n_1}^{n_2} (v-e_1) f(v,\varrho') \cdot E''_{n,(k)}(v) \cdot E'''_{(k)}(\varrho') \cdot dv \cdot dw'}{\int\limits_{r_1'}^{r_2'} (E'''_{(k)}(\varrho'))^2 \cdot dw' \cdot \int\limits_{n_1}^{n_2} (v-e_1) \cdot (E''_{n,(k)}(v))^2 dv} \right].$$

Wir wissen aber (vergl. die Bemerkung unter Seite 221), dass das erste Integral im Zähler gleich ist der Hälfte des ersten Integrals im Nenner, sofern wir nur die oben eingeführte Constante $L = 1$ setzen. Wir bekommen also:

$$b_{n,k} = \frac{2\int\limits_{r_1'}^{\infty}\int\limits_{n_1}^{n_2} (v-e_1) f(v,\varrho')\, E''_{n,(k)}(v)\, E'''_{(k)}(\varrho')\, dv \cdot dw'}{\int\limits_{n_1}^{n_2} (v-e_1)\, (E''_{n,(k)}(v))^2 dv}.$$

An diesem ganzen Ansatz braucht natürlich nichts geändert zu werden, wenn das unendlich kurze specialisirte Segment einem Kugelbüschel mit Punktgrundkreis entspricht und also in einem Punkte (21) oder (31) liegt.

§ 6. Ueber die verallgemeinerte Randwerthaufgabe und das Potential von Flächenbelegungen und von räumlich vertheilten Massen.

Wir haben früher gesehen (II, 4. § 4), dass die verallgemeinerte Randwerthaufgabe, bei welcher wir die Werthe von $V + c\frac{\partial V}{\partial n}$ auf der Oberfläche des vorgelegten Körpers vorschreiben, für das allgemeine Cyclidensechsflach schon deshalb durch unsere Methoden nicht zu lösen ist, weil die einfachen Lamé'schen Producte noch keine Potentiale sind, sondern erst mit den Factor T multiplicirt werden müssen, ehe wir Potentiale bekommen. Dieselbe Schwierigkeit wird auch bei den ausgearteten Coordinatensystemen auftreten, sofern sich dieser Factor T nicht auf eine Constante oder aber auf eine Function einer einzigen Coordinate reducirt. Wir werden uns also bei der verallgemeinerten Aufgabe (vergl. Seite 197) auf diejenigen Coordinatensysteme beschränken, welche Ausartungen elliptischer Coordinaten sind, d. h. welche zu Orthogonalsystemen gehören, die aus Flächen zweiten bezw. ersten Grades bestehen (excentrische Kugelbüschel allein ausgenommen)*).

*) Hiermit soll durchaus nicht behauptet werden, dass durch eine Erweiterung unserer Methode nicht auch andere Fälle betrachtet werden können. In der That hat Hicks (Phil. Trans. 1881) den Fall des Rotationspotentials im Aeusseren eines Kreisringes behandelt, bei welchem die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial n}$ vorgeschrieben werden.

Ist ein Körper durch Flächen eines dieser letzten Orthogonalsysteme begrenzt, so können wir die allgemeine Randwerthaufgabe nach Vorschrift von II, 4. § 4 lösen, sofern c auf jeder Seitenfläche, bis auf einen beliebigen constanten Factor, in ganz bestimmter Weise als Function des Ortes bestimmt ist. Dabei darf aber, allgemein zu reden, c, sofern es einen *constanten* Werth haben soll, ausser dem Werthe Null, welcher auf die einfache Randwerthaufgabe zurückführt, nur den Werth ∞ haben, was natürlich bedeuten wird, dass die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial n}$ selber vorgeschrieben werden. Uebrigens sehen wir, indem wir auf die früheren Entwickelungen Bezug nehmen, dass c eine einfache geometrische Bedeutung hat. Es muss nämlich c in jedem Punkte einer Seitenfläche proportional sein dem Abstande zwischen dieser Seitenfläche und einer unendlich benachbarten Fläche derselben Schaar. Es haben also diejenigen Fälle besonderes Interesse, in welchen die Flächen der Schaar äquidistant sind, indem auf Seitenflächen, welche solchen Flächenschaaren angehören, c einen beliebigen constanten Werth haben kann.

Natürlich werden auch bei diesen verallgemeinerten Randwerthaufgaben in speciellen Fällen ganz ähnliche Modificationen der Behandlungsweise in Anwendung gebracht werden müssen (z. B. Integraldarstellungen), wie in den entsprechenden Fällen für die einfache Randwerthaufgabe. Hierauf wollen wir aber nicht näher eingehen, sondern nur das Hauptresultat folgendermassen zusammenfassen:

Wenn ein Körper gegeben ist, welcher als Ausartung eines Cycliden-sechsflachs angesehen werden kann, so können wir durch unsere Methoden ein Potential V innerhalb desselben bestimmen, welches dort eindeutig und nebst seinen ersten Ableitungen stetig ist und auf den Seitenflächen eine Grenzbedingung befriedigt, welche folgendermassen gewählt werden kann:

Auf jeder Seitenfläche kann diese Bedingung darin bestehen, dass die Werthe von V beliebig vorgeschrieben werden.

Auf jeder Seitenfläche, welche zu einer Schaar von Flächen erster oder zweiter Ordnung gehört, welche kein excentrischer Kugelbüschel ist, können wir statt dessen die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial n}$ beliebig vorschreiben; (oder aber die Werthe von $V + c\frac{\partial V}{\partial n}$, sofern c auf specielle Weise als Function des Ortes auf der Oberfläche bestimmt ist).

Auf jeder der Seitenflächen, welche zu einer Schaar äquidistanter Flächen gehört, können wir die Werthe von $V + c\frac{\partial V}{\partial n}$, unter c eine beliebige Constante verstanden, beliebig vorschreiben.

Indem wir uns zum Ziele setzen, zu den hauptsächlichen Problemen der gewöhnlichen Potentialtheorie Stellung zu nehmen, betrachten wir eine neue Aufgabe. *Es wird ein Körper gegeben, dessen Oberfläche in beliebiger Weise mit Masse belegt ist, welche nach dem Newton'schen Gesetze anzieht. Es wird verlangt, das Potential dieser Oberflächenbelegung sowohl innerhalb als auch ausserhalb des Körpers zu bestimmen.* Ist insbesondere der vorgelegte Körper die Ausartung eines Cyclidensechsflachs, so können wir das hiermit ausgesprochene Problem, wie wir zeigen wollen, durch unsere Methoden lösen, sofern das in Betracht kommende Orthogonalsystem das System confocaler Flächen zweiten Grades oder eine Ausartung desselben ist.

Fassen wir zunächst den Fall eines Vollellipsoids ins Auge. Hier wird auf dem Ellipsoid $\varrho = r_1$ eine Massenbelegung von der Flächendichtigkeit $\sigma(\mu, \nu)$ ausgebreitet, und wir wollen das Potential bestimmen, welches von dieser Flächenbelegung herrührt. Dieses Potential werden wir durch zwei verschiedene Reihen darstellen, von denen das eine das Potential V_i innerhalb des Ellipsoids, das andere das Potential V_a ausserhalb desselben darstellt. Die erste dieser Reihen wird nach Lamé'schen Producten, welche zum Inneren, die zweite nach Lamé'schen Producten, welche zum Aeusseren des Ellipsoids gehören, fortschreiten müssen. Die Lamé'schen Producte der ersten Reihe haben wir schon III, 3. § 3 ausführlich besprochen. Die Lamé'schen Producte, welche zum Aeusseren des Vollellipsoids gehören, unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass der dritte Factor, welcher vom Parameter ϱ der Ellipsoidenschaar abhängt und welcher nicht oscillirt, so zu bestimmen ist, dass er im Punkte $\varrho = \infty$ (d. h. im unendlich fernen Raumpunkte) nicht unendlich wird*). Bezeichnen wir diesen dritten Factor durch $\overline{E}$, so werden wir V_i und V_a folgendermassen in Reihen zu entwickeln haben:

$$V_i = \sum \sum A_{m,n} E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\varrho),$$

$$V_a = \sum \sum \overline{A}_{m,n} E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot \overline{E}'''_{m,n}(\varrho),$$

wo gerade wie früher in jeder Reihe acht verschiedene Lamé'sche Producte vorkommen, welche durch obere Indices ε_3, ε_4, ε_5 zu unterscheiden sind, die wir aber der Einfachheit halber weglassen.

Nun wissen wir aus allgemeinen Principien der Potentialtheorie, dass auf dem Ellipsoid $\varrho = r_1$:

---

*) Dieser Factor wird natürlich nicht mehr algebraisch sein. Er ist vielmehr die von Liouville und Heine eingeführte „Lamé'sche Function zweiter Art".

$$V_i = V_a, \quad \frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_a}{\partial n} = 4\pi\sigma,$$

wo n die Richtung der inneren Normale bedeutet. Erinnert man sich, dass man hier

$$dn = -\sqrt{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}\, dw$$

hat, so kann man diese zwei Bedingungen schreiben:

$$\sum\sum [A_{m,n} E'''_{m,n}(r_1) - \bar{A}_{m,n} \bar{E}'''_{m,n}(r_1)] \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) = 0,$$

$$\sum\sum \left[A_{m,n} \frac{dE'''_{m,n}(\varrho)}{dw} - \bar{A}_{m,n} \frac{d\bar{E}'''_{m,n}(\varrho)}{dw}\right]_{\varrho = r_1} \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) =$$
$$= -4\pi \sqrt{(r_1 - \mu)(r_1 - \nu)} \cdot \sigma(\mu, \nu).$$

Bezeichnen wir in der zweiten dieser Gleichungen den Ausdruck in eckigen Klammern mit $B_{m,n}$, so haben wir die Aufgabe, die Coefficienten einer Reihe $\Sigma\Sigma B_{m,n} E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu)$ so zu bestimmen, dass die Reihe die Function $-4\pi\sqrt{(r_1 - \mu)(r_1 - \nu)} \cdot \sigma(\mu, \nu)$ darstellt. Dies können wir aber vermittelst unserer früheren Formeln thun. Sind dann jetzt $B_{m,n}$ die auf diese Weise bestimmten Grössen, so wird unser Problem offenbar gelöst sein, wenn wir $A_{m,n}$ und $\bar{A}_{m,n}$ den folgenden Gleichungen gemäss bestimmen:

$$A_{m,n} E'''_{m,n}(r_1) - \bar{A}_{m,n} \cdot \bar{E}'''_{m,n}(r_1) = 0,$$

$$A_{m,n} \left[\frac{dE'''_{m,n}(\varrho)}{dw}\right]_{\varrho = r_1} - \bar{A}_{m,n} \left[\frac{d\bar{E}'''_{m,n}(\varrho)}{dw}\right]_{\varrho = r_1} = B_{m,n}.$$

Die endgültigen Formeln, welche wir durch Auflösung dieser linearen Gleichungen und Einsetzen des Ausdruckes für B bekommen, brauchen wir nicht ausdrücklich hinzuschreiben.

Ist ferner nicht blos eine Fläche des Orthogonalsystems, sondern sind mehrere mit Masse belegt, so bestimmen wir auf die oben beschriebene Weise das Potential von jeder einzelnen Flächenbelegung und addiren sämmtliche so erhaltenen Potentiale. Insbesondere könnten wir die sechs Flächen, welche ein Sechsflach begrenzen, so mit Masse belegen, dass ausser in denjenigen Theilen der Flächen, welche als Seitenflächen des Sechsflachs auftreten, die Dichte überall Null ist. Innerhalb des Sechsflachs würden wir dann das Potential durch eine einzige Reihe dargestellt haben, ausserhalb desselben aber (falls wir es mit dem allgemeinen System confocaler Flächen zweiten Grades zu thun haben) durch 27 verschiedene Reihen, je nachdem wir uns in dem einen oder dem anderen der 46 Raumtheile befinden, in welchem

der Raum ausserhalb des Sechsflachs selber durch die sechs Begrenzungsflächen getheilt wird.

Gehen wir nun einen Schritt weiter und suchen wir *das Potential einer räumlichen Massenvertheilung.* Hier wollen wir wiederum das Vollellipsoid von gegebener (veränderlicher) Dichte betrachten. Dieses Ellipsoid können wir durch Ellipsoidenflächen, welche mit seiner Begrenzung confocal sind, in unendlich dünne Schichten zerlegen. Das Potential einer jeden solchen Schicht bestimmen wir dann gerade wie bei der Flächenbelegung oben und bekommen das Gesammtpotential des Ellipsoids, indem wir sämmtliche so erhaltenen Potentiale addiren, d. h. ein Integral bilden*).

Es mag aber hier besonders betont werden, dass bei dieser Behandlungsweise das specielle krummlinige Coordinatensystem und zugleich das specielle System Lamé'scher Producte, welche in Anwendung gebracht werden, völlig willkürlich ist**); so könnten wir z. B. das Vollellipsoid ebensogut in kugel- oder cylinderförmige Körper zerlegen, in welchem Falle man das Coordinatensystem H) bezw. N) statt des Coordinatensystems I) gebrauchen würde***). Es kann sogar der Körper eine beliebige Gestalt haben, d. h. nicht von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sein. Dabei wird diese Methode natürlich nur dann in der Praxis anzuwenden sein, wenn sie Resultate liefert, welche in irgend einer Beziehung einfacher erscheinen als das gewöhnliche dreifache Integral: $V = \iiint T\,dm$, in welchem T den reciproken Abstand eines Massenelementes dm des Körpers von einem beliebigen Punkte des Raumes bedeutet. Ob die Methode überhaupt praktisch anzuwenden ist, bezw. welches Coordinatensystem auszusuchen ist, wird natürlich von der besonderen Dichtigkeitsvertheilung abhängen.

Die letzten Bemerkungen gelten auch für eine andere in der Literatur vielfach angewandte Methode, welche sich unmittelbar an die oben angeführte Integralformel:

$$V = \iiint T\,dm$$

anschliesst. Diese Methode besteht darin, dass T in eine nach Lamé'schen Producten fortschreitende Reihe entwickelt wird, wodurch man gleich

---

*) In der hier geschilderten Weise wird in dem Lehrbuch von Byerly: „Fourier's Series etc." das Potential eines homogenen Ellipsoids behandelt.

**) Eine ähnliche Willkür tritt bei den Randwerthaufgaben nur dann ein wenn der Körper durch eine oder mehrere Kugeln begrenzt ist. Vergl. S. 204.

***) Allein man könnte dann das Potential im Aussenraume nicht mehr durch eine einzige Reihe darstellen.

für V selber eine gleichgebaute Reihe bekommt. Diese Entwickelung von T geschieht meistens durch verschiedene analytische Kunstgriffe, bei welchen die Oscillationseigenschaften der Glieder der darstellenden Reihe nicht hervorgehoben werden. Dagegen können wir dieselbe gerade auf unsere Behandlung der fundamentalen Randwerthaufgabe zurückführen. In der That ist T selber ein eindeutiges Potential, welches in einem Punkte (a, b, c) unendlich wird, sonst aber überall nebst seinen ersten Ableitungen endlich und stetig verläuft. Nehmen wir also irgend ein Cyclidensechsflach, in dessen Inneren der Punkt (a, b, c) nicht liegt, und bestimmen wir die Werthe von T auf dessen Oberfläche, so werden wir gerade das Potential T in der Form einer Reihe bekommen, wenn wir durch unsere frühere Methode die gewöhnliche Randwerthaufgabe mit dem Werthe von T als Randwerth für dieses Cyclidensechsflach lösen.

Wollen wir z. B. T nach denjenigen speciellen Lamé'schen Producten entwickeln, welche dem Coordinatensystem N) (Seite 104), also gewöhnlichen Cylindercoordinaten, entsprechen, so verfahren wir folgendermassen. Wir bezeichnen die Cylindercoordinaten des anziehenden Punktes (a, b, c) durch (a, s, ω), diejenigen eines beliebigen anderen Punktes (x, y, z) durch (x, r, ψ), und betrachten einen der Halbräume, welcher durch die Ebene $x = a$ begrenzt ist, als Ausartung eines Cyclidensechsflachs. Wir müssen dann innerhalb dieses Halbraums ein Potential bestimmen, welches dort eindeutig und nebst seinen ersten Ableitungen stetig ist, und für $x = a$ sich auf

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos(\psi - \omega)}}$$

reducirt. Die ganze Schwierigkeit besteht also in der Auswerthung der Coefficienten der Entwickelung (in diesem Falle der gemischten Reihen- und Integraldarstellung) dieser Function *).

Schliesslich kommen wir zu einem sowohl sachlich wie auch historisch sehr interessanten Problem. Wird ein Rotationskörper**)

---

*) Als endgültiges Resultat theilen wir folgende Formel mit, welche in Heine's „Handbuch" Bd. II p. 175 auf ganz anderem Wege abgeleitet ist:

$$T = 2\sum_{0}^{\infty}{}^{\prime} \cos\nu(\psi - \omega)\int_{0}^{\infty} e^{\mp(x-a)\lambda} \cdot J_\nu(\lambda r) \cdot J_\nu(\lambda s)\, d\lambda.$$

Das obere oder untere Vorzeichen ist hier zu gebrauchen, je nachdem die Darstellung im Halbraume $x > a$ oder $x < a$ gelten soll.

**) Dies soll heissen, dass alle Flächen constanter Dichte Rotationsflächen mit gemeinsamer Rotationsaxe sind.

vorgelegt, so ist es oft leicht, etwa durch directe Integration, das Potential desselben für Punkte auf der Rotationsaxe zu finden. Offenbar wird das Potential selbst ein Rotationspotential sein. Ein solches Potential ist aber vollständig bestimmt, wenn seine Werthe auf der Rotationsaxe gegeben sind. Es entsteht also die Aufgabe, *dieses Potential vermöge der bekannten Werthe desselben auf der Rotationsaxe in der Form einer Reihe darzustellen.*

Bei diesem Probleme lege man das gewöhnliche Polarcoordinatensystem H) (Seite 103) zu Grunde, indem man die Axe des Systems mit der Rotationsaxe zusammenfallen lässt. Hier stelle man zunächst solche Lamé'sche Producte auf, welche selbst Rotationspotentiale sind. Diese Lamé'schen Producte schreiben wir, der gewöhnlichen Bezeichnungsweise folgend, als:

$$(Lr^n + Mr^{-n-1})(L'P_n(\cos\vartheta) + M'Q_n(\cos\vartheta)).$$

Sollen diese Producte nicht mindestens auf der einen Hälfte der Rotationsaxe unendlich werden, so muss nicht nur $M' = 0$ sondern auch die Zahl n eine ganze positive Zahl sein; vergleiche des Näheren den nächsten Paragraphen.

Wir wollen uns nun der Kürze halber auf einen Theil des Problems beschränken, indem wir uns nur mit demjenigen Theile des Raumes beschäftigen, der ausserhalb einer Kugel liegt, welche den Anfangspunkt als Mittelpunkt hat und welche den anziehenden Körper ganz einschliesst. Ausserhalb dieser Kugel werden unsere Lamé'schen Producte eindeutig und bis auf den unendlich fernen Punkt stetig. Damit sie aber für diesen Punkt nicht unendlich werden, müssen wir setzen $L = 0$. Wir werden also schliesslich unser Potential V in eine Reihe folgender Gestalt zu entwickeln haben:

$$V = \sum_0^\infty {}_n A_n \frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}.$$

Setzen wir nun:

$$B_n = A_n P_n(1),^{*})$$

und bezeichnen wir die auf der Rotationsaxe gegebenen Werthe von V durch $f(r)$, so haben wir nur noch die Coefficienten folgender Reihenentwickelung zu bestimmen:

$$f(r) = \sum_0^\infty {}_n \frac{B_n}{r^{n+1}}.$$

---

*) Gewöhnlich bestimmt man $P_n(\cos\vartheta)$ gleich durch Hinzufügung eines von n abhängigen numerischen Factors so, dass $P_n(1) = 1$. Dann werden B_n und A_n natürlich mit einander identisch.

D. h. wir brauchen nur $f(r)$, welche natürlich stets eine analytische Function sein wird, in der Nähe des Punktes $r = \infty$ in eine fallende Potenzreihe zu entwickeln. Hierin liegt das Merkwürdige bei dieser Lösung, denn in allen anderen Fällen haben wir die gegebene Function, welche keine analytische Function zu sein brauchte, in eine Reihe entwickelt, welche nur *oscillirende* Lamé'sche Functionen enthält, *hier aber oscilliren die Lamé'schen Functionen nicht*, denn sie sind reelle Potenzen von r.

§ 7. Historischer Bericht über die hauptsächlichsten bis jetzt aufgestellten Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Einordnung in unsere Theorie*).

Der erste, der mit Erfolg Reihenentwickelungen der von uns betrachteten Art in der mathematischen Physik aufgestellt hat, ist Legendre, der in einem Aufsatz „Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes“**) diejenigen Reihenentwickelungen für das Potential von Rotationskörpern aufstellte, welche wir am Schlusse des vorigen Paragraphen discutirt haben. Dabei macht er von der Differentialgleichung des Potentials keinen Gebrauch, sondern geht von der Darstellung eines Potentials als dreifaches Integral aus.

Als eine Erweiterung dieses Aufsatzes ist die epochemachende Abhandlung von Laplace, „Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes“ (1782)***) anzusehen. Hier handelt es sich um das Potential eines nur wenig von der Kugelgestalt abweichenden Körpers. Obwohl die Differentialgleichung des Potentials hier zum ersten Male eingeführt wird, wird bei der Behandlung des Problems die Integralformel für das Potential eines Körpers benutzt. Die Lösung der einfachen Randwerthaufgabe für die Vollkugel bekommt man durch eine geringe Modification der hier von Laplace entwickelten Analysis. Zu diesem Problem ist von unserem früheren Standpunkte aus Folgendes zu sagen.

Wie schon früher bemerkt, kann die Vollkugel auf viele verschiedene Weisen als Ausartung des allgemeinen Cyclidensechsflachs angesehen werden. Um aber die Laplace'sche Reihenentwickelung zu bekommen, muss man das gewöhnliche Polarcoordinatensystem H)

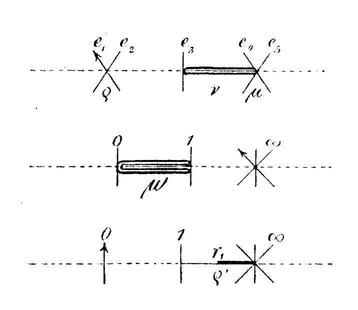
---

*) Bei Seite gelassen werden die Reihenentwickelungen der Störungstheorie, da sie nach ganz anderen Principien, wie die von uns betrachteten, aufgebaut sind.

**) Mémoires des savants étrangers. Bd. X. (1785). Wegen des wahren Datums dieser Abhandlung vergl. Heine's „Handbuch“. (2. Aufl.) Bd. I. S. 2.

***) Mémoires de l'académie des sciences.

(Seite 103) zu Grunde legen. In diesem Coordinatensystem können wir die Vollkugel durch die nebenstehenden Schemata charakterisiren. Dieser Körper kommt also in zweifacher Hinsicht unter denjenigen, welche in § 5 discutirt sind, vor, indem die Segmente ν und ϱ' beide specialisirt sind. Trotzdem aber kommt keine Integraldarstellung hier vor, denn wir haben in den Segmenten μ' und ν Oscillation zu verlangen. Es wird also das Segment ϱ' zum Falle a) § 5 gehören, das Segment ν zum Falle b). Dem Umstande entsprechend, dass das eine Segment, in welchem Oscillation verlangt wird, in einem verschwindenden Intervalle μ liegt, werden wir die lineare Verbindung $Ae_4 + B$ der accessorischen Parameter leicht bestimmen können. Unserem allgemeinen Ansatze zufolge wäre vielleicht zu erwarten, dass zur vollständigen Bestimmung der accessorischen Parameter die Auflösung einer transcendenten Gleichung nöthig wäre. Dies ist aber bekanntlich nicht der Fall, sondern es wird, wenn wir $e_1 = \infty$ setzen, $A = n(n+1)$, wo n eine ganze Zahl ist. Dies ist im Zusammenhange unserer Darstellung dadurch zu erklären, dass die Vollkugel ein specieller Fall des Vollellipsoids ist (vergl. § 3).



Wir kommen jetzt zu Fourier's grosser Preisschrift „Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides", welche 1812 von der Pariser Akademie gekrönt wurde*). Es wird hier nicht nur die gewöhnliche, sondern auch die verallgemeinerte Randwerthaufgabe für das rechtwinklige Parallelepepidon durch sog. Fourier'sche Reihen gelöst. Ferner wird dann ein oder alle beide Segmente, in welchen Oscillation verlangt wird, specialisirt, indem eine oder zwei Dimensionen des Parallelepepidons unendlich gesetzt werden. Hierdurch verwandelt sich ein oder beide Summenzeichen in Integralzeichen und wir haben die Lösung des Problems in der Form von Fourier'schen Integralen.

Weiter wollen wir nur noch ein Problem anführen, welches von Fourier behandelt wird, nämlich die einfache und auch die verallgemeinerte Randwerthaufgabe für den Rotationscylinder von endlicher Länge. Allerdings behandelt hier Fourier nur das Problem des Rotationspotentials, so dass ausschliesslich die Bessel'schen Functionen nullter Ordnung bei

*) Diese Arbeit ist erst 1824—26 in den Mémoires de l'académie gedruckt worden. Der erste und wichtigste Theil war schon 1822 mit nur unwesentlichen Aenderungen unter dem Titel „Théorie analytique de la chaleur" erschienen. Cf. Fourier's gesammelte Werke.

ihm vorkommen. Der allgemeine Fall wurde einige Jahre später von Poisson behandelt*). Auch in diesem Problem enthält das Schema unseres Körpers ein specialisirtes Segment, welches unter a) § 5 gehört, so dass wir keine Integraldarstellung bekommen.

In einer sehr schwer lesbaren Abhandlung „On the determination of the exterior and interior attraction of ellipsoids of variable densities"**) beschäftigt sich Green mit dem Potential eines nichthomogenen Ellipsoids. Aeusserlich unterscheidet sich aber seine Behandlung des Problems von der unsrigen dadurch gänzlich, dass er zunächst das Ellipsoid mitsammt dem umgebenden Raume als in einem Raume von vier Dimensionen gelegen denkt, dann aber auch, dass er durchweg mit gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten rechnet. Auch wird das Problem gleich für Räume beliebig vieler Dimensionen gelöst.

Diese Abhandlung blieb auf dem Continent lange unbekannt. Jedenfalls wurde Lamé nicht davon beeinflusst, als er 1839 seine berühmte Abhandlung „Sur l'équilibre des témperatures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux"***) veröffentlichte. Hier handelt es sich um die einfache Randwerthaufgabe für das Innere eines Vollellipsoids. Es wird zunächst der specielle Fall einer Vollkugel behandelt, wobei nicht wie bei Laplace das gewöhnliche System von Polarcoordinaten angewendet wird, sondern das allgemeinere System E) (Seite 102), in welchem ausser den concentrischen Kugeln allgemeine Kegel zweiten Grades vorkommen. Hier haben wir es, wie durch unseren allgemeinen Ansatz leicht zu sehen ist, mit genau denselben Functionen $E'(\mu)$, $E''(\nu)$ zu thun, wie beim Vollellipsoid; nur der dritte Factor bekommt jetzt, gerade wie bei Laplace, die einfache Gestalt r^n. Man erkennt also, wie Lamé, ausgehend von den Resultaten von Laplace, erst zum Coordinatensystem der confocalen Kegel aufstieg, um erst von da aus zum allgemeinen System elliptischer Coordinaten überzugehen.

Hieran schliessen sich eine Reihe Arbeiten zunächst von Lamé selbst†),

---

*) „Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides" 1821. Journal de l'École Polytechnique 1823.

**) Vorgelegt 1833, gedruckt 1835 in den Transactions of the Cambridge Philosophical society. Die Methoden dieser Arbeit sind weiter geführt worden, einmal von Cayley „A Memoir on Prepotentials" Phil. Trans. 1875, dann aber von Niven „On Ellipsoidal Harmonics" Phil. Trans. 1892.

***) Liouville's Journal Bd. IV.

†) „Sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution". Liouville's Journal Bd. IV. 1839.

dann von Heine*), Liouville**) und F. Neumann***), in welchen einerseits Lamé's Untersuchungen verallgemeinert werden, indem der Raum ausserhalb eines Ellipsoids oder der Raum zwischen zwei confocalen Ellipsoiden in Betracht gezogen wird, andererseits die Specialfälle des Rotationsellipsoids discutirt werden.

Die einfache Randwerthaufgabe für einen Kreisring bietet, wenn einmal die Lamé'schen Producte aufgestellt sind, keine Schwierigkeit mehr. Die Lösung dieses Problems geht auf C. Neumann und Riemann zurück (vergl. III, 2. § 3)†).

Wir kommen jetzt zum öfters erwähnten Appendix B in Thomson und Tait's Natural Philosophy, 1867. Hier wird die Randwerthaufgabe für Körper gelöst, welche von Flächen des Orthogonalsystems H) (Seite 103), also von Rotationskegeln, Meridianebenen und concentrischen Kugeln begrenzt wird. Allerdings werden als Beispiele nur solche Körper angeführt, welche höchstens vier Seitenflächen besitzen; es reicht aber die dort entwickelte Methode, welche mit der unsrigen ihrem Grundgedanken nach identisch ist, aus, um auch das zu diesem System gehörige Sechsflach zu behandeln. Merkwürdigerweise werden aber keine Fälle angeführt, in welchen die Reihenentwickelungen in Integraldarstellungen ausarten.

Solche Integraldarstellungen findet man in zwei Aufsätzen von Mehler††). In dem ersten handelt es sich um den Raum, welcher von zwei sich schneidenden Kugeln begrenzt ist, also um das Inverse des Winkelraumes zwischen zwei Meridianebenen†††), und es wird so

---

*) „De aequationis nonnullis differentialibus". Inauguraldissertation 1842, zum Theil abgedruckt in Crelle Bd. 26. 1843. — „Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme" Crelle Bd. 29. 1845. — „Theorie der Anziehung eines Ellipsoids", Crelle Bd. 42. 1851.

**) „Sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique." Liouville's Journal Bd. 10. 1845.

***) „Magnetischer Zustand eines Rotationsellipsoids", Crelle Bd. 37. 1848.

†) Weiteres hierüber (verallgemeinerte Randwerthaufgabe $a = \infty$) sowie über das Potential eines materiellen Kreisringes findet man bei Hicks „On Toroidal Functions" Phil. Trans. 1881.

††) „Ueber die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelcalotten begrenzten Körper". Crelle Bd. 68. 1868. — „Ueber eine mit Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Electricitätsvertheilung". Elbing, Gymnasialprogramm 1870 (abgedruckt in Math. Ann. Bd. 18).

†††) Der Fall zweier Kugelflächen, welche sich nicht treffen oder im Grenzfalle sich berühren, war schon früher von C. Neumann behandelt, „Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird". Halle 1862.

verfahren, dass die reciproke Entfernung zweier Punkte als Integral (Grenzform einer Reihe) dargestellt wird. Als Coordinatentensystem wird hier das inverse Bild eines gewöhnlichen Polarcoordinatensystems, zu Grunde gelegt. In der zweiten Arbeit untersucht Mehler die Elektricitätsvertheilung auf der einen unendlichen Hälfte eines Rotationskegels, wodurch wir auf Fourier'sche Integrale kommen, wie wir in einem ähnlichen Falle in § 5 gesehen haben. Verschiedene Probleme ähnlicher Art wurden neuerdings von Hobson*) durch unsere Methode gelöst.

Fast gleichzeitig wurden von Mathieu**) und H. Weber***) zwei Aufsätze veröffentlicht, welche sich mit Problemen beschäftigen, die mit der Randwerthaufgabe der Potentialtheorie aufs engste zusammenhängen, wenn der betreffende Körper von confocalen Cylindern zweiten Grades und von Parallelebenen begrenzt wird. Während Mathieu nur den Fall eines Cylinders, dessen Basis eine Vollellipse ist, ins Auge fasst, betrachtet Weber auch den allgemeineren Fall eines Cylinders, dessen Basis von vier confocalen Kegelschnitten begrenzt ist, wobei der Fall, in welchem diese Kegelschnitte Parabeln sind, in den Vordergrund tritt. Dieses Problem ist, wie man sieht, was die principielle Schwierigkeit der Lösung angeht, nicht viel einfacher als die Randwerthaufgabe für das allgemeine Cyclidensechsflach. Die Weber'sche Behandlung ist aber insofern wesentlich unvollständiger als die unsrige, als das Oscillationstheorem fehlt, so dass die Annahme, dass die hier in Betracht kommenden transcendenten Gleichungen Wurzeln haben ohne weitere Begründung bleibt†).

*) „On a class of Spherical harmonics of complex degree with applications to physical problems". Phil. Trans. 1889.

**) „Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique". Liouville's Journal, 1868.

***) „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.\text{"}$$ Math. Ann. Bd. I. 1868.

†) Die Gestalt der Bereiche, welche von confocalen Parabeln begrenzt sind, werden in diesem Aufsatze unnöthig beschränkt, indem verlangt wird, dass die Verlängerungen der Begrenzungscurven durch das Innere des Bereichs nicht hindurchgehen sollen. Eine ähnliche Einschränkung wird auch in der Inauguraldissertation von Schubert „Ueber die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$ für Flächenstücke, die von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden". Danzig 1886, gemacht. — An die Abhandlung von Weber schliesst sich auch: C. Baer, „Die Function des parabolischen Cylinders", Gymnasialprogramm. Cüstrin 1883. Hier mag auch die Inauguraldissertation des letztgenannten Mathematikers genannt werden, in welcher die Randwerthaufgabe für das Rotationsparaboloid behandelt wird: „Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung der Wärme in einem Rotationsparaboloid", Halle 1881.

Es bleiben noch die vielen Anwendungen zu nennen, welche sich im zweiten Bande des Heine'schen Handbuchs befinden. Sofern es sich hier um neue Probleme handelt, sind sie vorzugsweise durch die im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Methode gelöst, welche darin besteht, den reciproken Abstand T zweier Punkte in Reihen zu entwickeln; man vergl. namentlich das Kapitel über elliptische Cylinder und Kreiscylinder.

In den letzten Jahren ist die Methode der Reihenentwickelungen vielfach angewandt worden, namentlich von den jüngeren englischen Mathematikern. Die physikalischen Probleme, auf welche sich ihre Untersuchungen beziehen, sind indess zumeist nicht Potentialprobleme, sondern Probleme complicirterer Natur und kommen also für uns nicht in Betracht.

Kommen wir noch einmal auf den Aufsatz von Klein „Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind" 1881*), zurück. Hier wird die einfache Randwerthaufgabe für das Sechsflach gelöst, welches von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist, und zwar werden gerade diejenigen Methoden benutzt, welche wir unserer Darstellung zu Grunde gelegt haben. Insbesondere wird auch das Vollellipsoid betrachtet, aber die Uebereinstimmung mit der Lamé'schen Lösung wird nicht so weit entwickelt, wie wir es in § 3 gethan haben. Der Fortschritt, welcher in dieser Abhandlung liegt besteht darin, dass die von Thomson nur angedeutete anschauliche Methode hier entwickelt, und auf einen bis dahin nicht betrachteten allgemeinen Fall angewandt wird.

An diesen Aufsatz schliesst sich die in der Einleitung genannte Vorlesung von 1889—90. Als neuer Gesichtspunkt dieser Vorlesung ist das Voranstellen der Cycliden als des geometrisch allgemeinsten Falles, und der allgemeine Ansatz zum Einordnen der Specialfälle in die so entwickelte Theorie anzusehen. Hiermit wurden die Grundlinien für die Darstellung dieses Buches gegeben, welches aber betreffs der Behandlung der Specialfälle in manchen Punkten über den Inhalt jener Vorlesung hinausgreift.

---

*) Math. Ann. Bd. 18.

Anhang.

Uebertragung der bisherigen Resultate auf den Raum von n Dimensionen *).

Dieser auf den Raum von n Dimensionen sich beziehende Anhang möge trotz seiner Unvollständigkeit aus zweierlei Gründen hier noch Platz finden. Zunächst wird man durch Heranziehung höherer Räume einen besseren Ueberblick über unsere bisher entwickelte Theorie für den dreidimensionalen Raum gewinnen, wobei z. B. die Beziehung zum Raume von zwei Dimensionen klar hervortreten wird. Andererseits wird es sich herausstellen, dass man vermittelst dieser Ausdehnung der Theorie auch im gewöhnlichen Raume über den Rahmen der Potentialtheorie hinaus zu allgemeineren Reihenentwickelungen der mathematischen Physik gelangen kann.

Den Raum von n Dimensionen werden wir als R_n, eine ν-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit desselben als M_ν bezeichnen. Wir werden aber oft der Kürze halber eine M_{n-1} als *Fläche* (bezw. als Ebene, Kugel, Cyclide etc.) des R_n bezeichnen.

§ 1. Ueber confocale Cyclidensysteme des R_n.

Um die Geometrie der reciproken Radien mit der projectiven Geometrie in Verbindung zu setzen, verfahren wir geradeso wie beim R_2. Wir denken uns nämlich den R_n als Ebene des R_{n+1} und projiciren denselben stereographisch auf eine Kugel des R_{n+1}. Auf diese Weise

*) In der wiederholt erwähnten Vorlesung von Herrn Klein über Lamé'sche Functionen wurden die Betrachtungen zum grossen Theil gleich für den Raum von n Dimensionen durchgeführt. Während aber die Ausartungen des allgemeinen Cyclidensystems im R_2 und R_3 eine mehr oder weniger eingehende Besprechung fanden, so mussten wegen Mangel an Zeit im Falle des R_n alle diese Ausartungsfälle ausgeschlossen bleiben.

bekommen wir den Satz*): *Die Kreisverwandtschaften des R_n entsprechen genau denjenigen Collineationen des R_{n+1}, welche die betreffende Kugel in sich überführen.*

Im R_{n+1} werden wir jetzt ein projectives Coordinatensystem $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ zu Grunde legen. Die Punkte der Kugel des R_{n+1} entsprechen dann denjenigen Werthen der Verhältnisse $x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+2}$, welche einer quadratischen Gleichung $\Omega = 0$ genügen. Diese Coordinatenbestimmung nebst der Identität $\Omega = 0$ übertragen wir dann durch stereographische Projection auf den R_n. Die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_{n+2} = 0$ stellen offenbar $n + 2$ Kugeln des R_n dar und dementsprechend werden wir $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ ein System *polysphärischer Coordinaten* nennen. Es lässt sich dann leicht nachweisen, dass diese Coordinaten beliebig zu wählenden Vielfachen der Potenzen des betreffenden Punktes in Bezug auf die $n + 2$ Grundkugeln des R_n proportional sind.

Die so eingeführten polysphärischen Coordinaten haben genau dieselben Eigenschaften, die wir im speciellen Falle des R_3 für die pentasphärischen Coordinaten in I. 2, § 7 zusammengestellt haben; nur dass an Stelle der Zahl 5 jetzt die Zahl $n + 2$ zu setzen ist. So wird z. B. die allgemeine Cyclide des R_n, d. h. die Fläche, welche durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades in den polysphärischen Coordinaten dargestellt wird, $n + 2$ Symmetriekugeln besitzen, welche einander orthogonal schneiden.

Für das allgemeine confocale Cyclidensystem des R_n bekommen wir nebst der Identität:

$$\sum_1^{n+2} {}_i\, a_i x_i^2 = 0$$

die Gleichung:

$$\sum_1^{n+2} {}_i\, \frac{a_i x_i^2}{\lambda - e_i} = 0.$$

Hier ziehen wir wieder die Weierstrassische Theorie der Elementartheiler heran, um sämmtliche Ausartungen dieses Orthogonalsystems aufzuzählen. Zunächst werden, sofern wir uns auf das Reelle beschränken, nur die Kategorien I, II, III in Betracht kommen. Hierbei verstehen wir unter I den Fall von $n + 2$ einfachen Elementartheilern, unter II den Fall von einem zweifachen und n einfachen

*) Man vergl. Klein: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Ann. Bd. V, 1871.

Elementartheilern, und unter III den Fall von einem dreifachen und $n-1$ einfachen Elementartheilern. Ferner finden wir, dass sich die Kategorie I in zwei Kategorien I′ und I″ spaltet, je nachdem sämmtliche Werthe e_i reell oder zwei davon conjugirt imaginär sind. Dagegen müssen die e_i in den Kategorien II und III sämmtlich reell sein. Alles verhält sich also gerade wie im R_3, so dass wir nicht länger hierbei zu verweilen brauchen.

Man kann natürlich nicht verlangen, dass wir eine vollständige Tabelle der Cyclidensysteme des R_n entwerfen, obwohl für einen bestimmten Werth von n eine solche Tabelle nicht schwer zu construiren wäre. Wir führen aber einige Sätze an, welche bestimmt sind, eine derartige Tabelle bis zu einem gewissen Grade zu ersetzen*). Zunächst beweist man mit Leichtigkeit Folgendes:

Wenn ein ν-facher Punkt e_i eintritt, welcher zu ν einfachen Elementartheilern gehört, so sind alle Flächen der Schaar symmetrisch in Bezug auf sämmtliche Kugeln des $(\nu-1)$-fach ausgedehnten Kugelbüschels, dessen Gleichung die ν dem betreffenden ν-fachen Punkte entsprechenden polyphärischen Coordinaten enthält.

Nun ist aber klar, dass nur solche Punktkugeln als Symmetriekugeln einer Fläche betrachtet werden können, welche in Doppelpunkten der Fläche liegen. Hiernach müssen alle Punktkugeln des obenerwähnten Kugelbüschels Doppelpunkte sämmtlicher Cycliden der Schaar sein. Erinnern wir uns jetzt daran, dass die Gleichung einer Punktkugel durch Polarisation der Identität in Bezug auf den betreffenden Punkt zu bekommen ist, so sehen wir, dass jeder Punkt, welcher auf allen zum mehrfachen Punkte e_i nicht gehörenden Grundkugeln liegt, als Punktkugel betrachtet, zum obengenannten Kugelbüschel gehört. Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn ein ν-facher Punkt e_i eintritt, welcher zu ν einfachen Elementartheilern gehört, so besitzen alle Flächen der Schaar als doppelte Mannigfaltigkeit den Schnitt $M_{\nu-2}$ derjenigen $n+2-\nu$ Grundkugeln, welche dem Punkte e_i nicht entsprechen.

Gehen wir jetzt zum Falle mehrfacher Elementartheiler über, so haben wir vor allen Dingen den Satz:

Tritt ein zwei- bezw. dreifacher Punkt, welcher einem einzigen Elementartheiler entspricht, ein, so besitzen alle Flächen der Schaar einen gemeinsamen Doppelpunkt bezw. biplanaren Punkt.

---

*) Man vergl. S. 70—71, wo ähnliche Sätze für den R_3 aus der Tabelle empirisch abgelesen wurden.

Es bleiben noch die Fälle zu discutiren, in welchen e_1 gleichzeitig zu einem mehrfachen und einem oder mehreren einfachen Elementartheilern gehört. Hier lassen sich die etwas complicirten Verhältnisse am besten beschreiben, wenn wir die im Sinne der Geometrie der reciproken Radien unwesentliche Specialisirung eintreten lassen, dass die Punktkugel $x_1 = 0$ im Unendlichen liegt. Man bekommt dann leicht den Satz:

Tritt ein mehrfacher Punkt ein, welcher einem mehrfachen und ν einfachen Elementartheilern entspricht, so sind alle Flächen der Schaar in Bezug auf die ∞^ν Ebenen symmetrisch, welche dem Schnitte $M_{n-\nu}$ derjenigen ν Symmetrieebenen parallel sind, welche den einfachen Elementartheilern des mehrfachen Punktes entsprechen.

Dieser Satz unterscheidet aber nicht zwischen einem $(\nu + 2)$-fachen Punkt der Kategorie II und einem $(\nu + 3)$-fachen Punkt der Kategorie III. In beiden Fällen ist der unendlich ferne Punkt ein singulärer Punkt höherer Ordnung von allen Flächen der Schaar und es ist die Art dieser Singularität, welche zwischen den Kategorien II und III unterscheidet. Hierauf wollen wir aber nicht näher direct eingehen, sondern vielmehr den Schnitt des Cyclidensystems mit dem oben erwähnten $M_{n-\nu}$ betrachten. Diesen Schnitt können wir als Cyclidensystem des $R_{n-\nu}$ ansehen. Wir bekommen den Satz:

Fasst man im Falle des letzten Satzes den Schnitt der Cyclidenschaar mit der dort erwähnten $M_{n-\nu}$ ins Auge, so hat man eine Schaar von Cycliden des $R_{n-\nu}$, welche im Unendlichen einen gemeinsamen singulären Punkt besitzen. Derselbe wird ein Doppelpunkt oder ein biplanarer Punkt sein, je nachdem ein zweifacher oder ein dreifacher Elementartheiler vorhanden war.

Jetzt fragen wir, in welchen Fällen die Cyclidenschaar in einen Kugelbüschel ausartet. Die Bedingung hierfür besteht offenbar darin, dass die Gleichung jeder Cyclide der Schaar vermöge der Identität so umgeformt werden kann, dass sie in zwei Linearfactoren zerlegbar ist. Auf dem hiermit bezeichneten Wege findet man mit leichter Mühe den Satz:

Das Auftreten eines mehrfachen Punktes e_i, welcher zu n verschiedenen Elementartheilern gehört, liefert die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Cyclidenschaar in einen Kugelbüschel ausartet.

Nur in den allgemeinen Fällen der Kategorien I′, I″, II, III erfüllt die unmittelbar vorhandene Flächenschaar, von welcher bis jetzt allein die Rede war, den R_n n-fach. In allen anderen Fällen gehen in der unmittelbaren Nähe eines mehrfachen Punktes e_i, welcher ν

verschiedenen Elementartheilern entspricht, $\nu - 1$ eigentliche (d. h. nicht nulltheilige) Flächenschaaren verloren. Es ist also in jedem solchen Falle ein gewisser Hülfsgrenzübergang zu machen, welcher sich ganz ähnlich gestaltet wie im R_3, so dass wir auf die Einzelheiten nicht einzugehen brauchen. Wir wollen nur hervorheben, dass, sofern mehr wie zwei verschiedene Elementartheiler vorkommen, der Grenzübergang nicht mehr ein völlig bestimmter ist, sondern auf verschiedene Weisen ausgeführt werden kann, je nachdem die ergänzenden Flächenschaaren mehr oder weniger allgemein sein sollen.

Bezeichnen wir die Schnitte (M_{n-2}) einer Cyclide mit einer sie orthogonal schneidenden Cyclidenschaar als ihre *Krümmungslinien*, so können wir die soeben constatirte Thatsache in folgender Form aussprechen:

Wenn ein mehrfacher Punkt, welcher zu ν verschiedenen Elementartheilern gehört, im Schema eines Cyclidensystems vorkommt, so sind (sofern $\nu > 2$) von den $n - 1$ Systemen von Krümmungslinien jeder Cyclide der Schaar $\nu - 1$ nicht völlig bestimmt.

Im R_3 tritt Aehnliches natürlich nur bei Kugeln ein.

Wir bemerken noch, dass man es im R_n nicht vermeiden kann, falls man sämmtliche Ausartungen unseres Orthogonalsystems bekommen will, auch solche Grenzübergänge zu machen, bei welchen die soeben besprochene Willkür eintritt. Die Herstellung der Tabelle von S. 102—104 in der dort besprochenen, bestimmten Weise war also nur im R_3 möglich.

Schliesslich sind krummlinige Coordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, in ähnlicher Weise wie die Coordinaten μ, ν, ϱ im R_3, einzuführen. Schreiben wir:

$$f(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2) \ldots (\lambda - e_{n+2}),$$

so hat man als Formeln zur Einführung der allgemeinen krummlinigen Coordinaten des R_n:

$$\sigma x_i^2 = \frac{(\lambda_1 - e_i)(\lambda_2 - e_i) \ldots (\lambda_n - e_i)}{f'(e_i)},$$

wo der Proportionalitätsfactor σ durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\sigma} = -\sum_1^{n+2} {}_i\, e_i x_i^2$$

zu bestimmen ist.

§ 2. Ueber die Potentialtheorie des R_n und die Behandlung derselben vermöge Lamé'scher Producte.

Unter einer Potentialfunction des R_n versteht man eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{\partial^2 V}{\partial X_i^2} = 0,$$

unter X_i rechtwinklige Cartesische Coordinaten verstanden.

Wir wollen jedoch ein System orthogonaler pentasphärischer Coordinaten mit der Identität $\sum_{1}^{n+2}{}_{i}\, x_i^2 = 0$ zu Grunde legen. Dementsprechend werden wir nicht die Potentialfunction V, sondern vielmehr eine Potentialform W in Betracht ziehen, welche entsteht, wenn man V mit der $\frac{2-n}{2}$-ten Potenz der linken Seite der Gleichung der unendlich fernen Punktkugel multiplicirt. D. h.:

$$W = \left(\sum_{1}^{n+2}{}_{i} \frac{x_i}{R_i} \right)^{\frac{2-n}{2}} \cdot V.$$

Es ist also W eine Form $\frac{2-n}{2}$-ter Dimension der pentasphärischen Coordinaten, nicht wie V eine Form nullter Dimension, d. h. eine Function der Verhältnisse der x_i allein.

Da im Falle $n = 2$ der Exponent $\frac{2-n}{2}$ den Werth Null hat, bekommen wir den Satz: *Im R_2 kommt die Unterscheidung zwischen Potentialfunction und Potentialform in Wegfall.*

Die so eingeführte Potentialform W genügt, wie leicht nachzuweisen (vergl. II, 3, § 1), der Differentialgleichung:

$$\sum_{1}^{n+2}{}_{i} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0$$

und ist geradezu durch dieselbe charakterisirt, indem jede Lösung dieser Gleichung, welche homogen von der $\frac{2-n}{2}$-ten Dimension, eine Potentialform ist.

Wollen wir das Potential durch cyclidische Coordinaten behandeln, so müssen wir noch den Factor:

$$\left(\sum_1^{n+2} {}_i\, e_i x_i^2\right)^{\frac{2-n}{4}}$$

abtrennen und schreiben:

$$V = \left(\frac{\sum_1^{n+2} {}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^{n+2} {}_i\, e_i x_i^2}}\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \psi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n).$$

Wir bemerken, dass auch hier im R_2 kein Unterschied zwischen der Potentialfunction V und der Function ψ besteht.

Setzen wir jetzt zur Abkürzung:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n),$$

so finden wir durch Rechnungen, welche denjenigen von II, 3, § 2 genau analog sind, dass die Function ψ der Differentialgleichung genügt:

$$\sum_1^n {}_i \left(\frac{1}{\varphi'(\lambda_i)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_i^2}\right) + \left[\frac{n^2-4}{4} \sum_1^n {}_i \lambda_i + \frac{2n-n^2}{4} \sum_1^{n+2} {}_i\, e_i\right] \psi = 0,$$

unter t_i das hyperelliptische Integral:

$$\int \frac{d\lambda_i}{2\sqrt{(\lambda_i - e_1)(\lambda_i - e_2) \ldots (\lambda_i - e_n)}}$$

verstanden.

Jetzt suchen wir Lösungen dieser Differentialgleichung, welche die Form eines Lamé'schen Productes haben, also die Form:

$$\psi = E'(\lambda_1) \cdot E''(\lambda_2) \cdots E^{(n)}(\lambda_n).$$

Zu diesem Zwecke ziehen wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \sum_1^n {}_i \frac{1}{\varphi'(\lambda_i)} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_i}$$

zu Hülfe. Entwickelt man hier auf beiden Seiten nach fallenden Potenzen von λ, so bekommt man durch Vergleich der Coefficienten der Potenzen von λ folgende Identitäten:

$$\sum_1^n {}_i \frac{1}{\varphi'(\lambda_i)} = 0,$$

$$\sum_1^n {}_i \frac{\lambda_i}{\varphi'(\lambda_i)} = 0, \qquad \sum_1^n {}_i \frac{\lambda_i^{n-1}}{\varphi'(\lambda_i)} = 1,$$

$$\cdot \qquad \sum_1^n {}_i \frac{\lambda_i^n}{\varphi'(\lambda_i)} = \sum_1^n {}_i \lambda_i .$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\sum_1^n {}_i \frac{\lambda_i^{n-2}}{\varphi'(\lambda_i)} = 0,$$

Vermöge dieser Identitäten sehen wir, dass die Functionen $E^{(i)}$ beliebige Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \Big[-\frac{n^2-4}{4} \lambda^n - \frac{2n-n^2}{4} \sum_1^{n+2} {}_i e_i \cdot \lambda^{n-1} + A \lambda^{n-2}$$

$$+ B\lambda^{n-3} + \cdots + M \Big] \cdot E$$

sein können. Letztere Gleichung ist eine Lamé'sche Gleichung mit den $n+2$ einfachen singulären Punkten e_i. Dabei können die accessorischen Parameter $A, \ldots M$ willkürlich gewählt werden, nur müssen sie für alle Functionen $E^{(i)}$ dieselben sein.

Führen wir an Stelle der Functionen $E^{(i)}$ Lamé'sche Formen $F^{(i)}(\lambda_i', \lambda_i'')$, wobei $\lambda_i = \frac{\lambda_i'}{\lambda_i''}$, ein, so können wir, ganz ähnlich wie auf Seite 149 für den R_3 geschehen ist, die Potentialform W in der symmetrischen Gestalt schreiben:

$$\left(\frac{|\lambda\lambda_1| \cdot |\lambda\lambda_2| \cdots |\lambda\lambda_n| \cdot \lambda''}{f(\lambda', \lambda'') \sum_1^{n+2} {}_i \frac{x_i^2}{\lambda' - e_i \lambda''}} \right)^{-\frac{n-2}{4}} F'(\lambda_1', \lambda_1'') \cdot F''(\lambda_2', \lambda_2'') \cdots F^{(n)}(\lambda_n', \lambda_n''),$$

wo die Grössen λ', λ'' nur formal auftreten.

Denken wir uns jetzt ein Cycliden-$2n$-flach gegeben, d. h. ein n-fach ausgedehntes Stück des R_n, welches durch $2n$ confocale Cycliden des R_n begrenzt ist; und stellen wir uns die *Randwerthaufgabe: ein Potential zu finden, welches innerhalb dieses Körpers eindeutig und nebst seinen ersten Differentialquotienten stetig verläuft und in jedem Punkte der Begrenzung beliebig vorgeschriebene Werthe annimmt.*

Um diese Randwerthaufgabe zu lösen, spalten wir dieselbe zunächst in $2n$ Einzelprobleme, indem wir jedesmal eine Seitenfläche auszeichnen und darauf die Werthe des Potentials beliebig vorschreiben,

auf den anderen $2n-1$ Seitenflächen aber gleichförmig verlangen, dass das Potential verschwindet. Bei jedem Einzelprobleme suchen wir zugehörige Lamé'sche Producte auf, d. h. Lamé'sche Producte, welche sämmtlichen Bedingungen des Problems genügen, diejenige Bedingung ausgenommen, welche sich auf die ausgezeichnete Seitenfläche bezieht. Um solche Lamé'sche Producte aufzustellen, bedürfen wir des folgenden Oscillationstheorems:

Wenn $n-1$ Segmente der reellen λ-Axe gegeben sind, welche in $n-1$ verschiedenen Intervallen liegen, so können die $n-1$ accessorischen Parameter der Lamé'schen Gleichung dadurch eindeutig und reell festgelegt werden, dass wir von der Gleichung verlangen, sie solle $n-1$ Particularlösungen haben, welche bezw. in den Endpunkten je eines Segmentes verschwinden und innerhalb desselben eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Halboscillationen ausführen.

Es ist zu schwierig die Richtigkeit dieses Satzes durch geometrische Construction im R_n einzusehen *). Deshalb wollen wir die Lösung der

---

*) Für den R_4, wo wir es mit einer Lamé'schen Gleichung mit sechs singulären Punkten zu thun haben, kann man folgende Ueberlegung anstellen (K). Wir werden die Werthe von λ nicht mehr durch Punkte auf einer geraden Linie, sondern durch Punkte auf einem Kegelschnitt darstellen. Dies thut man am einfachsten, indem man:

$$x = \lambda^2, \qquad y = \lambda,$$

setzt, unter x, y Cartesische Coordinaten verstanden. Auf der Parabel $y^2 = x$ werden also Intervalle durch die reellen Punkte $\lambda = e_i$ von einander abgegrenzt, und in drei von diesen Intervallen liegen die Segmente, auf welche wir das Oscillationstheorem anwenden wollen. Wir werden uns jetzt desselben mechanischen Hülfsproblems wie im Falle des R_3 bedienen. Die Stärke der Kraft wird dann in jedem Moment von dem Werth von $a\lambda^2 + b\lambda + c$, d. h. von der Ordinate z der *Hülfsebene* $z = ax + by + c$ abhängen. Es wird sich also zunächst darum handeln, sich über die Gestalt der Hüllfläche klar zu werden, welche entsteht, wenn wir diese Ebene sich so bewegen lassen, dass sie in dem einen Segment stets die gewünschte Anzahl von Oscillationen hervorruft. Betrachten wir den Cylinder, welcher das betreffende Segment der Parabel und seine Sehne zur Basis hat. Dann findet man, dass die Hüllfläche die Gestalt einer durchaus convexen Einstülpung hat, welche, aus dem Unendlichen kommend, in diesen Cylinder so zu sagen hineingepresst ist, ohne jedoch dessen Wandungen anders als im Unendlichen zu berühren. Es ist nun klar, dass eine und nur eine gemeinsame Tangentialebene an die den drei Segmenten entsprechenden Hüllflächen gelegt werden kann; und hiermit ist das Oscillationstheorem in diesem Falle bewiesen.

Ein entsprechender Beweis für höhere Fälle wäre nicht mehr überzeugend, weil die Construction der Hülfsebenen, Hüllflächen etc. in Räumen höherer Dimensionen nicht mehr diejenige Anschaulichkeit besitzt, die der Kern des Beweises ist.

Randwerthaufgabe nicht weiter verfolgen, zumal dieselbe, wenn wir das Oscillationstheorem als richtig voraussetzen wollen, genau nach Muster der schon gelösten Aufgabe im R_3 zu führen wäre. Das Potential würde natürlich in der Form einer $(n-1)$-fachen Reihe dargestellt werden. Betrachten wir, um die Ideen zu fixiren, das Einzelproblem, in welchem die ausgezeichnete Seitenfläche eine Fläche $\lambda_n =$ const. ist, so bedient man sich folgender leicht zu beweisenden Formel zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe:

$$\int\int\cdots\int P\cdot E_l'(\lambda_1)\cdot E_l''(\lambda_2)\cdots E_l^{(n-1)}(\lambda_{n-1})\cdot E_{\bar{l}}'(\lambda_1)\cdot E_{\bar{l}}''(\lambda_2) \\ \cdots E_{\bar{l}}^{(n-1)}(\lambda_{n-1})\,dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1} = 0,$$

wo wir der Kürze halber gesetzt haben:

$$E_l(\lambda) = E_{l_1,\,l_2,\,\cdots\,l_{n-1}}(\lambda), \qquad E_{\bar{l}}(\lambda) = E_{\bar{l}_1,\,\bar{l}_2,\,\cdots\,\bar{l}_{n-1}}(\lambda),$$

unter l_i (bezw. $\bar{l}_i$) die Oscillationszahl im Segmente λ_i verstanden; und wo:

$$P = \begin{vmatrix} \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-3} \cdots \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-3} \cdots \lambda_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_{n-1}^{n-3} \cdots \lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)\cdots.$$

§ 3. Ueber die Ausartungen der im R_n in Betracht kommenden Lamé'schen Producte.

Haben wir die Randwerthaufgabe für das allgemeine Cycliden-$2n$-flach nicht zu Ende führen können, so kann von einer systematischen Behandlung der Specialfälle um so weniger die Rede sein. Allerdings können durch specielle Methoden*) einige besondere Fälle behandelt werden. Hierauf wollen wir aber der Kürze halber nicht näher eingehen. Dagegen bietet die Discussion der Lamé'schen Producte bei den verschiedenen ausgearteten Orthogonalsystemen keine Schwierigkeit, und wir wollen dieselben in diesem Paragraphen kurz besprechen.

Wir haben schon im R_3 gesehen, dass bei den ausgearteten Cyclidensystemen die Multiplicitäten der Punkte e_i mit den Multiplicitäten der singulären Punkte der zugehörigen Lamé'schen Gleichung nicht immer übereinstimmen. Es musste vielmehr bei den Kugel-

*) Wie z. B. die Methode von Stieltjes. Vergl. S. 214.

büscheln die Multiplicität des einen Punktes e_i um eine Einheit verkleinert werden. Aehnliches tritt im R_n nicht bloss bei Kugelbüscheln ein, sondern bei allen Flächenschaaren, deren Krümmungslinien nicht völlig bestimmt sind. Man findet nämlich durch Ueberlegungen, welche denjenigen ganz analog sind, die wir im R_3 benutzten, dass, wenn mehr wie zwei Elementartheiler einem Punkte e_i entsprechen, die accessorischen Parameter der Lamé'schen Gleichungen, welche den ergänzenden Flächenschaaren entsprechen, unendlich werden, wofern die accessorischen Parameter der unmittelbar vorhandenen Lamé'schen Gleichung nicht auf bestimmte Weise specialisirt werden. Um die Ausartung der Lamé'schen Gleichung, welche hiermit eintritt, bequem charakterisiren zu können, wollen wir den Ausdruck „Lamé'sche Function des R_n" gebrauchen. Hierunter verstehen wir eine Lamé'sche Function mit $n + 2$ einfachen oder eine entsprechende Anzahl von mehrfachen singulären Punkten. Wir können jetzt sagen:

Wenn im Schema eines Cyclidensystems des R_n ein ν-facher Punkt e_i auftritt, welcher μ verschiedenen Elementartheilern entspricht, so müssen wir (wenn $\mu \geqq 3$) die accessorischen Parameter der zugehörigen Lamé-schen Gleichung in der Weise specialisiren, dass ihre Lösungen nach Abtrennung des Factors $(\lambda - e_i)^{\frac{2-\mu}{4}}$ sich auf Lamé'sche Functionen des $R_{n-\mu+2}$ reduciren, welche e_i als $(\nu - \mu + 2)$-fachen singulären Punkt besitzt.

Einige specielle Folgerungen lassen sich nun hieraus mit Leichtigkeit ziehen.

Indem wir uns zunächst an die Bedingung erinnern (vergl. S. 246), unter welcher ein Cyclidensystem in einen Kugelbüschel ausartet, können wir sofort sagen:

Es treten bei Kugelbüscheln des R_n immer nur Lamé'sche Functionen des R_2 auf.

Andererseits wissen wir, dass, sofern wir uns auf das Reelle beschränken, nicht mehr wie ein mehrfacher Elementartheiler vorkommen kann, welcher dann höchstens dreifach sein kann. Es gilt also der Satz:

In der reellen Potentialtheorie der Räume von höheren Dimensionen treten Lamé'sche Functionen mit beliebig vielen regulären (einfachen oder zweifachen) singulären Punkten auf. Daneben kann ein irregulärer Punkt vorkommen, der aber dann höchstens ein vierfacher Punkt ist.

Schliesslich ist es aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen bekannt, dass jede überall reguläre homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten,

welche nur drei singuläre Punkte hat, durch hypergeometrische Reihen gelöst werden kann, und dass es hierbei im Wesentlichen nur auf die Exponentendifferenzen in den einzelnen singulären Punkten ankommt. Ferner kann man auf diese Weise durch geeignete Wahl der Exponentendifferenzen jede hypergeometrische Reihe bekommen. Es führen uns also die Lamé'schen Functionen des R_4 mit drei doppelten singulären Punkten gerade auf die allgemeine hypergeometrische Reihe (K). Bezeichnen wir die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten des R_4 durch x, y, z, w, so können wir sagen:

Die allgemeine hypergeometrische Reihe tritt als Lamé'sche Function des R_4 bei den Flächenschaaren [2(11)(11)] *und* [(11)(11)(11)] *auf, d. h. bei der zweifachen Schaar von Flächen zweiten Grades* $\frac{x^2+y^2}{\lambda-e_3}+\frac{z^2+w^2}{\lambda-e_5}=1$; *und bei der einfachen Schaar von Kegeln zweiten Grades* $\frac{x^2+y^2}{\lambda-e_3}+\frac{z^2+w^2}{\lambda-e_5}=0$; *bezw. bei den Inversen von diesen Flächenschaaren.*

Will man dagegen im R_3 eine reguläre Differentialgleichung mit drei singulären Punkten bekommen, so muss man die fünf einfachen singulären Punkte so zusammenfallen lassen, dass man zwei zweifache und einen einfachen singulären Punkt hat. Während also die zwei ersten Punkte beliebige Exponentendifferenzen erhalten können, wird der letzte Punkt stets die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ haben.

Es treten im R_3 nur specielle hypergeometrische Reihen auf (die Functionen des Rotationskegels), denn eine der drei Exponentendifferenzen hat hier nothwendig den Werth $\frac{1}{2}$.

§ 4. Ueber die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im dreidimensionalen Raume.

Haben wir es im R_n mit einem $(n-1)$-fachen System von Cylindern zu thun, so wird das ergänzende Flächensystem eine Schaar von Parallelebenen sein. Bezeichnet man diese Ebenenschaar durch $X_n =$ Const. (unter $X_1, X_2, \ldots X_n$ rechtwinklige Cartesische Coordinaten verstanden), so ist die entsprechende Lamé'sche Function einfach:

$$Le^{kX_n} + Me^{-kX_n}.$$

Bezeichnen wir nun durch u das Product der übrigen Lamé'schen Functionen, so genügt, wie man sofort nachrechnet, die Function u der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2_{n-1}} + k^2 u = 0.$$

Wir bekommen also den Satz:

Hat man es im R_n mit einem Cylindersystem, im R_{n-1} mit dem Querschnitt desselben zu thun, so werden die Lamé'schen Producte im R_n, welche der Potentialgleichung genügen, mit den ähnlich gebildeten Producten im R_{n-1}, welche der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen, übereinstimmen, nur dass bei den letzteren der Factor $Le^{kX_n} + Me^{-kX_n}$ fehlt.

Auf das mannigfache physikalische Auftreten der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ brauchen wir an dieser Stelle um so weniger einzugehen, als dasselbe in dem vor Kurzem erschienenen Buch von Pockels*) ausführlich discutirt ist. Dort wird auch unter Benutzung des Oscillationsprincips von der Methode der Reihenentwickelungen gehandelt, allerdings nur für den R_2 und R_3. An dieser Stelle wollen wir uns auf einen einzigen Punkt beschränken, der im Pockels'schen Buche nothwendig fehlt. Wir wollen nämlich eine Methode angeben, durch welche man einen Ueberblick über die bei den verschiedenen Orthogonalsystemen auftretenden Producte bekommt.

Unsere Methode besteht einfach in einer Anwendung des soeben abgeleiteten Satzes. Hierbei wird das Princip der reciproken Radien, welches in unseren bisherigen Betrachtungen eine so grosse Rolle gespielt hat, in Wegfall kommen, indem wir es jetzt im R_{n+1} nothwendig mit wirklichen Cylindersystemen, nicht mit deren Inversen zu thun haben**).

Fassen wir speciell die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im R_3 ins Auge, so haben wir nach unserer Methode vor allen Dingen sämmtliche Cylindersysteme des R_4 aufzuzählen, welche Ausartungen des allgemeinen Cyclidensystems des R_4 sind. Eine solche Aufzählung geben wir in folgender Tabelle an, in welcher wir aber nur die Querschnitte der Cylindersysteme durch den R_3 nennen. Es können μ, ν, ϱ als krummlinige Coordinaten im R_3 angesehen werden. Die vierte Coordinate, welche sich auf das System von Parallelebenen des R_4 bezieht und welche für den R_3 nicht in Betracht kommt, bezeichnen wir durch t***).

---

*) „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$". 1891.

**) Man vergl. auch das Buch von Pockels Seite 204—205.

***) Es mag hierdurch daran erinnert werden, dass bei den meisten physikalischen Problemen, in welchen die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auftritt, die Zeit als vierte Variable vorkommt, und zwar in einer solchen Weise, dass sie bis zu einem gewissen Grade die Stelle der vierten Coordinate der Potentialprobleme des R_4 vertritt.

Tabelle der im R_3 in Betracht kommenden Orthogonalsysteme

A) μ, ν = Kegel zweiten Grades.

B) μ = Rotationskegel.

C) μ = Ebenenpaare.

D) μ = zweischaalige Hyperboloide.
ν = einschaalige Hyperboloide.
ϱ = Ellipsoide.

E) ν = einschaalige Rotationshyperboloide.
ϱ = abgeplattete Rotationsellipsoide.

F) μ = zweischaalige Rotationshyperboloide.
ϱ = verlängerte Rotationsellipsoide.

G) ϱ = concentrische Kugeln.

H) μ = hyperbolische Cylinder.
ν = elliptische Cylinder.

I) ν = Rotationscylinder.

K) μ = Paare von Parallelebenen.

L) $\begin{cases} \mu, \varrho = \text{elliptische Paraboloide.} \\ \nu = \text{hyperbolische Paraboloide.} \end{cases}$

M) $\mu, \varrho =$ Rotationsparaboloide.

N) $\mu, \nu =$ parabolische Cylinder.

O) $\mu =$ Parallelebenen.

Aus dieser Tabelle sehen wir sofort, welche Lamé'sche Functionen bei den verschiedenen Flächenschaaren auftreten; denn die Punkte e_i der Schemata geben unmittelbar die Lage und die Multiplicität der singulären Punkte der Lamé'schen Functionen an, nur dass diese Multiplicitäten um eine bezw. zwei Einheiten verkleinert werden müssen, sobald drei bezw. vier verschiedene Elementartheiler demselben Punkte entsprechen. Wir fassen in folgenden Sätzen zusammen:

Will man die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im R_3 durch Lamé'sche Producte befriedigen, so werden:

1) *bei den Ebenenbüscheln* (C, K, O) *Lamé'sche Functionen des R_2, d. h. blosse trigonometrische Functionen,*

2) *bei den Kegel- und Cylindersystemen* (A, B, H, I, N) *dieselben Functionen wie früher in der Potentialtheorie des R_3,*

3) *bei den concentrischen Kugeln* (G) *Bessel'sche Functionen,*

4) *bei allen anderen confocalen Flächen zweiten Grades* (D, E, F, L, M) *specielle Lamé'sche Functionen des R_4 auftreten.*

Die hiermit genannten Functionen sind noch in den Fällen 1) 2) 3) bezw. mit dem Factor $(\lambda - e_1)^{-\frac{1}{2}}$, $(\lambda - e_1)^{-\frac{1}{4}}$, $(\lambda - e_4)^{-\frac{1}{4}}$ behaftet. Gewöhnlich wird aber der Punkt e_1 ins Unendliche geworfen, so dass diese Factoren in den Fällen 1) und 2) in Wegfall kommen. Dagegen hat jetzt im Falle 3) der Factor $(\lambda - e_4)^{-\frac{1}{4}}$ den Werth $r^{-\frac{1}{2}}$, unter r den Ausdruck für die Radien der concentrischen Kugeln verstanden. Hierdurch wird z. B. die wohlbekannte Thatsache erklärt, dass bei Wärmeleitungs- oder anderen Problemen, welche auf die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ führen und welche eine Kugel betreffen, Bessel'sche Functionen der Polarcoordinate r auftreten, welche jedoch

mit dem Factor $r^{-\frac{1}{2}}$ behaftet sind. Man vergl. z. B. das schon citirte Buch von Pockels Seite 110.

Es würde nun keine Schwierigkeit darbieten, die Behandlung der verschiedenen Probleme, welche sich auf die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ beziehen, an die oben gegebenen Schemata anzuknüpfen und ihre Lösungen in einer ganz entsprechenden Weise durchzuführen, wie wir dies für die Probleme der Potentialtheorie gethan haben, denn der Beweis des Oscillationstheorems ist in diesen Fällen ganz der frühere. Hierauf sowie auf die noch einfacheren Probleme, welche sich auf den R_2 beziehen, gehen wir aber der Kürze halber nicht ein.

R, UEBER DIE REIHENENTWICKLUNGEN DER POTENTIALTHEORIE